مکانیک سیالات

تعادل نسبی (حرکت دورانی با سرعت ثابت)

www.hadian.ir

محمدرضا هادیان
دانشگاه یزد – دانشکده مهندسی عمران

حالت کلی توزیع فشار در تعادل نسبی با شتاب خطی ثابت

$$p = -\rho a_x x - \rho (g + a_z) z + p_0$$

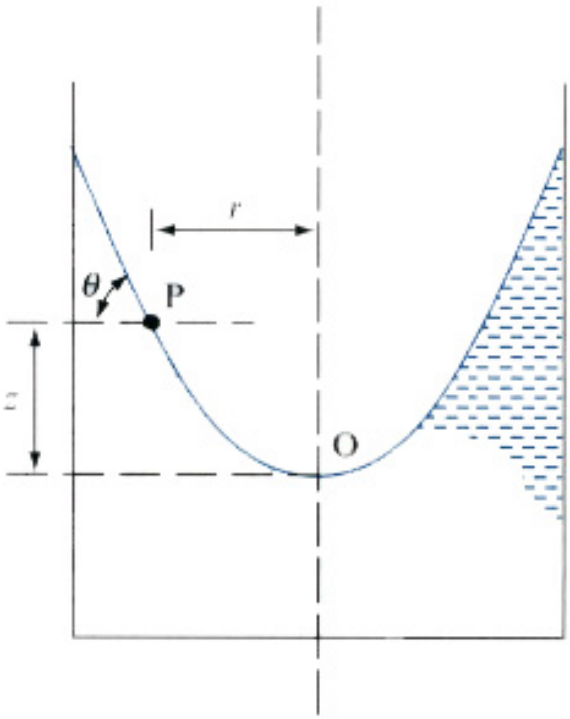
$$z = -\frac{a_x}{g + a_z} x + \frac{p_0 - p}{\rho g (1 + a_z / g)}$$

$$m = -\frac{a_x}{g + a_z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho (g + a_z)$$

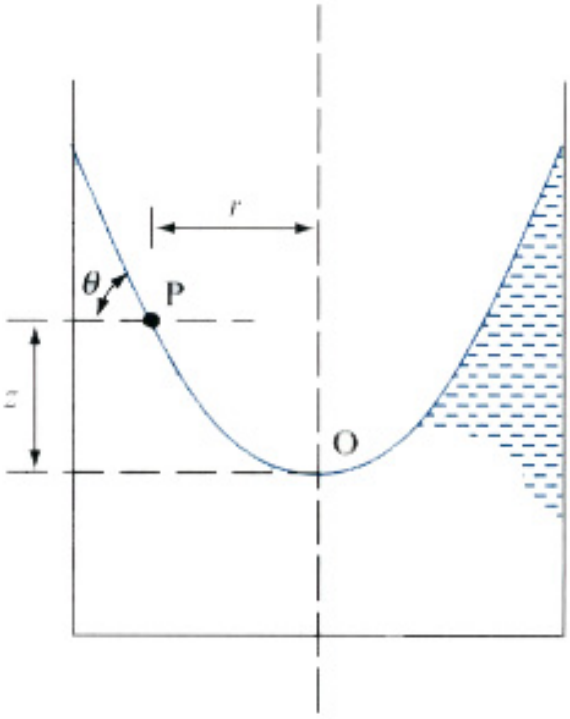
توزیع فشار در تعادل نسبی با سرعت دورانی ثابت



- مطابق شکل ظرفی که داخل آن مایع قرار دارد، حول محور قائم با سرعت دورانی ثابت، می‌چرخد.
- بعد از رسیدن به تعادل، ظرف و مایع داخل آن با سرعت دورانی یکسانی می‌چرخند.
- برای ذره که به فاصله r از محور دوران قرار دارد، شتاب ناشی از دوران برابر با $-\omega^2 r$ است. (جهت مثبت r از سمت محور به بیرون است.)

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

توزیع فشار در تعادل نسبی با سرعت دورانی ثابت



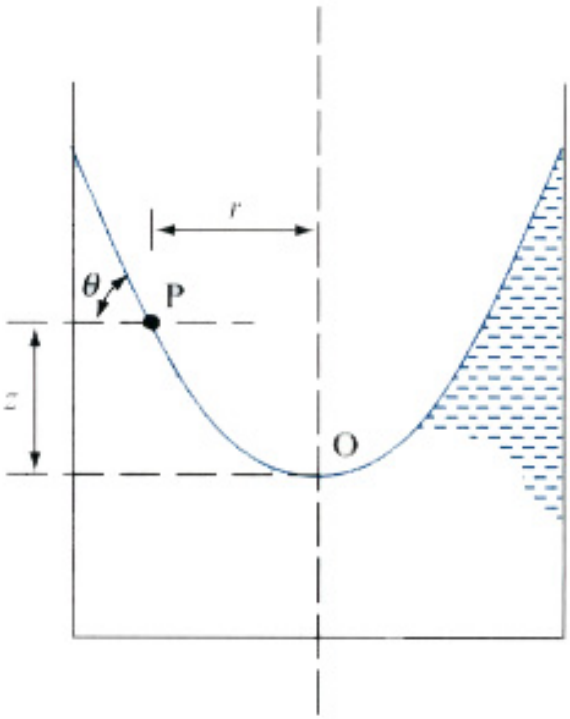
- تحت اثر دوران سطح آزاد مایع تغییر شکل می‌دهد.
- برای نقطه دلخواه P روی سطح آزاد مایع، زاویه سطح آزاد از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\tan\theta = -\frac{a_x}{g + a_z} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{dz}{dr}$$

- اگر زاویه سطح آزاد بر حسب r متغیر باشد و z ارتفاع نقطه p از مبدا (نقطه O) باشد.

$$dz = \frac{\omega^2 r}{g} dr \qquad z = \int \frac{\omega^2 r}{g} dr = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \text{constant}$$

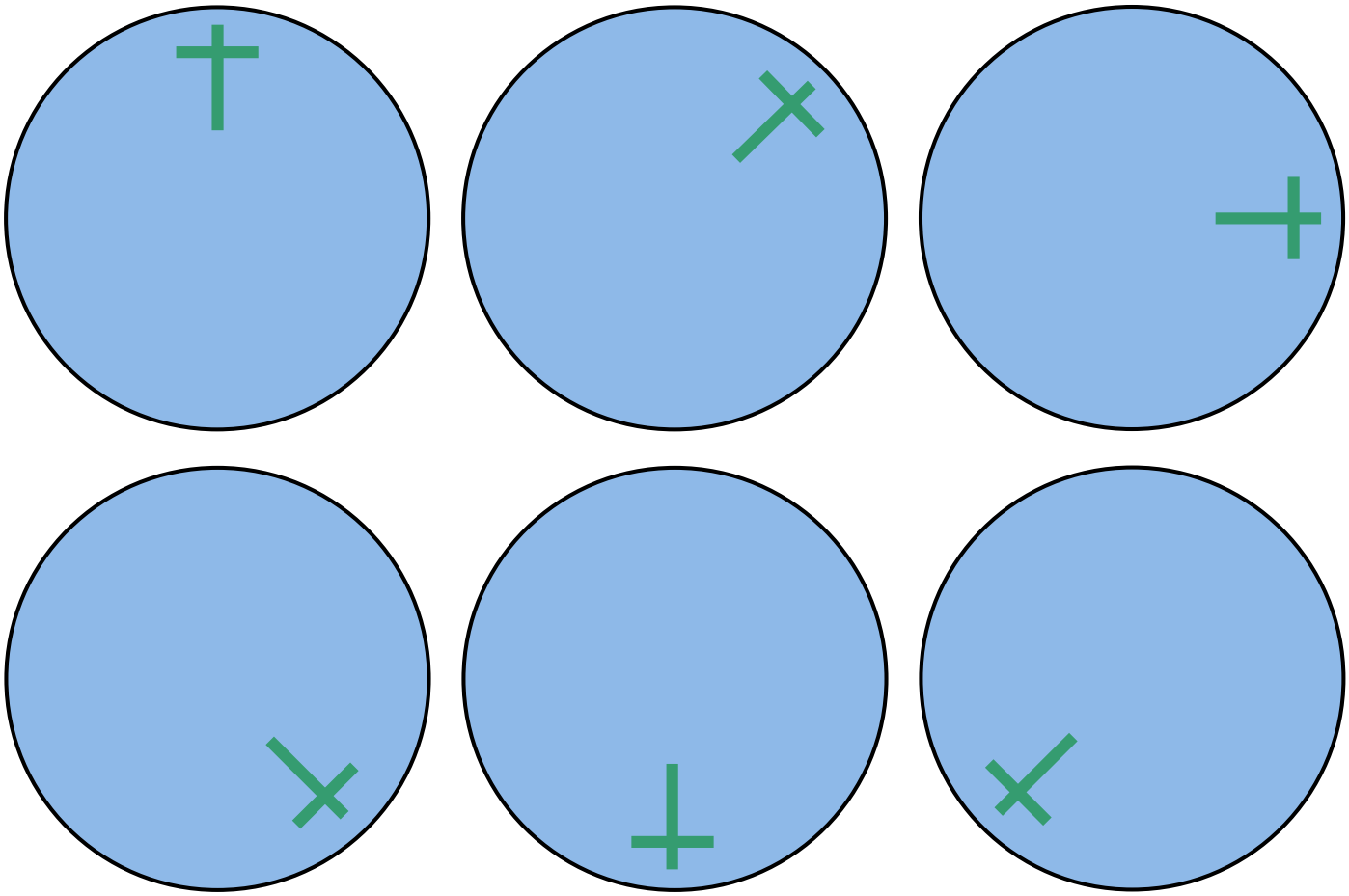
توزیع فشار در تعادل نسبی با سرعت دورانی ثابت



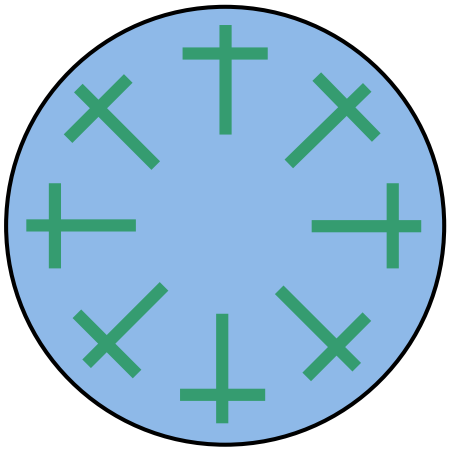
$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \text{constant}$$

- پروفیل سطح آزاد مایع و سایر سطوح هم‌فشار بصورت سهموی است.
- در حالتی که ظرف دربسته باشد و سطح آزاد وجود نداشته باشد، سطح آزاد فرضی نشان‌دهنده ارتفاع معادل فشار بر حسب شعاع می‌باشد.

گرداب اجباری (Forced Vortex)



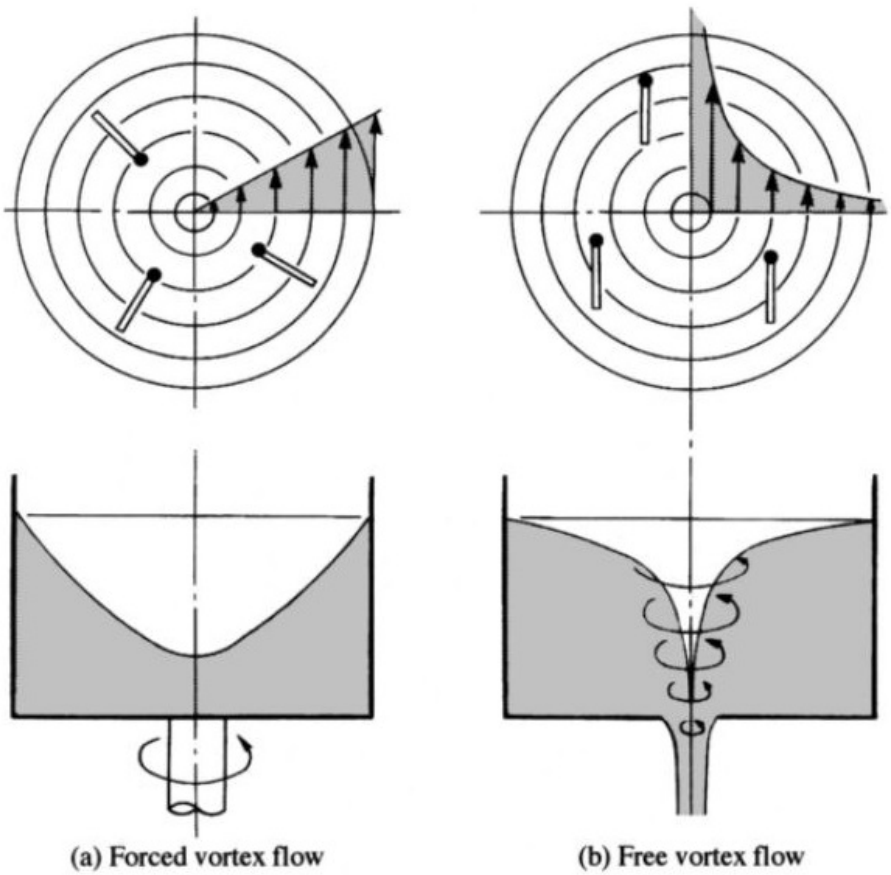
گرداب اجباری (Forced Vortex)



المان‌های سیال در هر بار گردش حول محور، یک دور هم به دور خود چرخیده‌اند.

جریان چرخشی (Rotational)

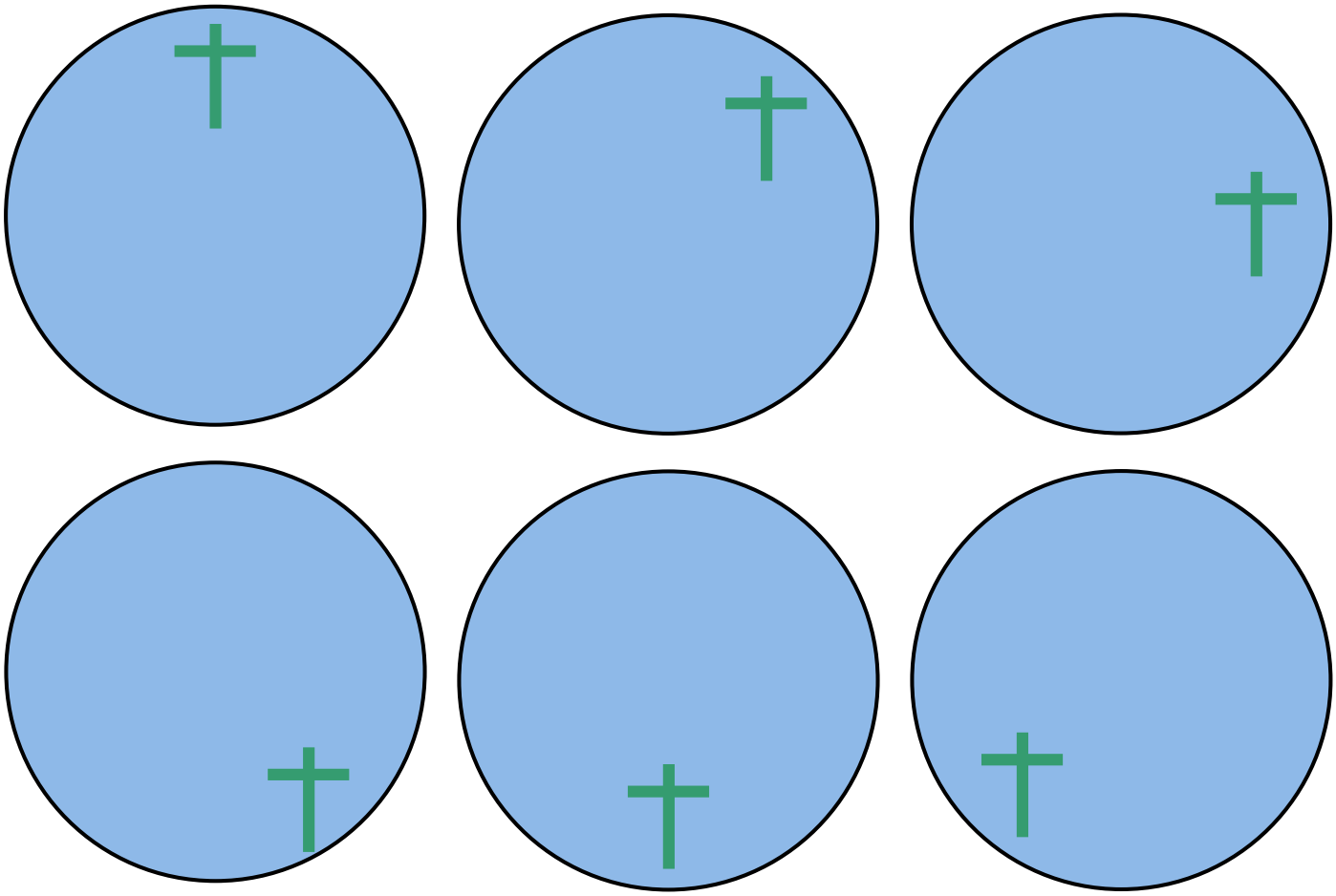
گرداب آزاد (Free Vortex)



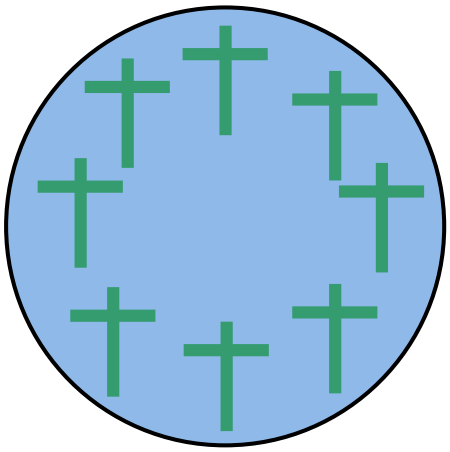
(a) Forced vortex flow

(b) Free vortex flow

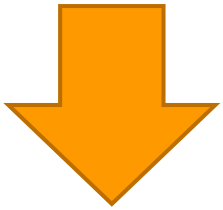
گرداب آزاد (Free Vortex)



گرداب آزاد (Free Vortex)



المان‌های سیال با گردش حول محور، به دور خود نچرخیده‌اند.



جریان غیرچرخشی (Ir-rotational)

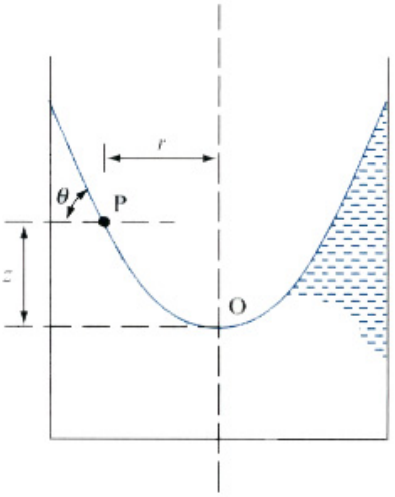
توزیع فشار در تعادل نسبی با سرعت دورانی ثابت

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r}dr + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$dp = (\rho\omega^2 r)dr + (-\rho g)dz$$



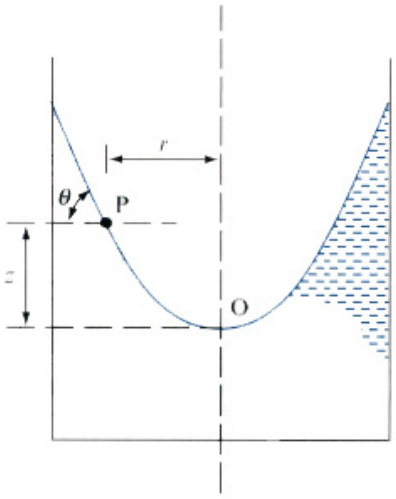
$$p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g z + p_0$$

توزیع فشار در تعادل نسبی با سرعت دورانی ثابت

- اگر مبدأ مختصات روی سطح آزاد باشد.

$$\begin{cases} r = 0 \\ z = 0 \end{cases} , \quad p = 0 \quad \Rightarrow \quad p_0 = 0$$

- برای صفحه افقی که در این حالت از مبدأ می‌گذرد (یا برای هر صفحه افقی که در آن $p_0=0$ است.)



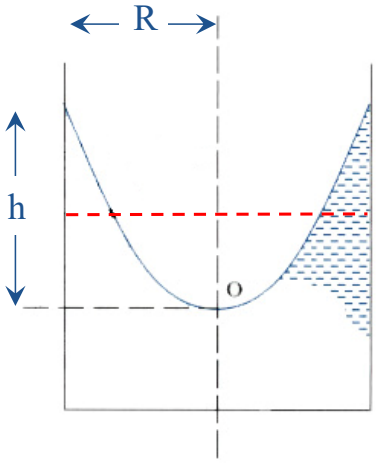
$$p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2}$$

- ارتفاع معادل فشار برای این صفحه:

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

معادله سطوح هم فشار بصورت سهمی گون می‌باشد.

توزیع فشار در تعادل نسبی با سرعت دورانی ثابت



- برای ظرف استوانه‌ای و در صورتی‌که مایع از ظرف بیرون نریزد:

$$h=\frac{\omega^2R^2}{2g}$$

- سهمی‌گون حاصل از دوران حجمی برابر با نصف استوانه محیطی دارد.

$$V=\frac{1}{2}\pi R^2\frac{\omega^2R^2}{2g}$$

- ارتفاع مایع بالای مبدأ قبل از دوران:

$$h_1=\frac{V}{A}=\frac{\frac{1}{2}\pi R^2\frac{\omega^2R^2}{2g}}{\pi R^2}=\frac{1}{2}\frac{\omega^2R^2}{2g}=\frac{1}{2}h$$

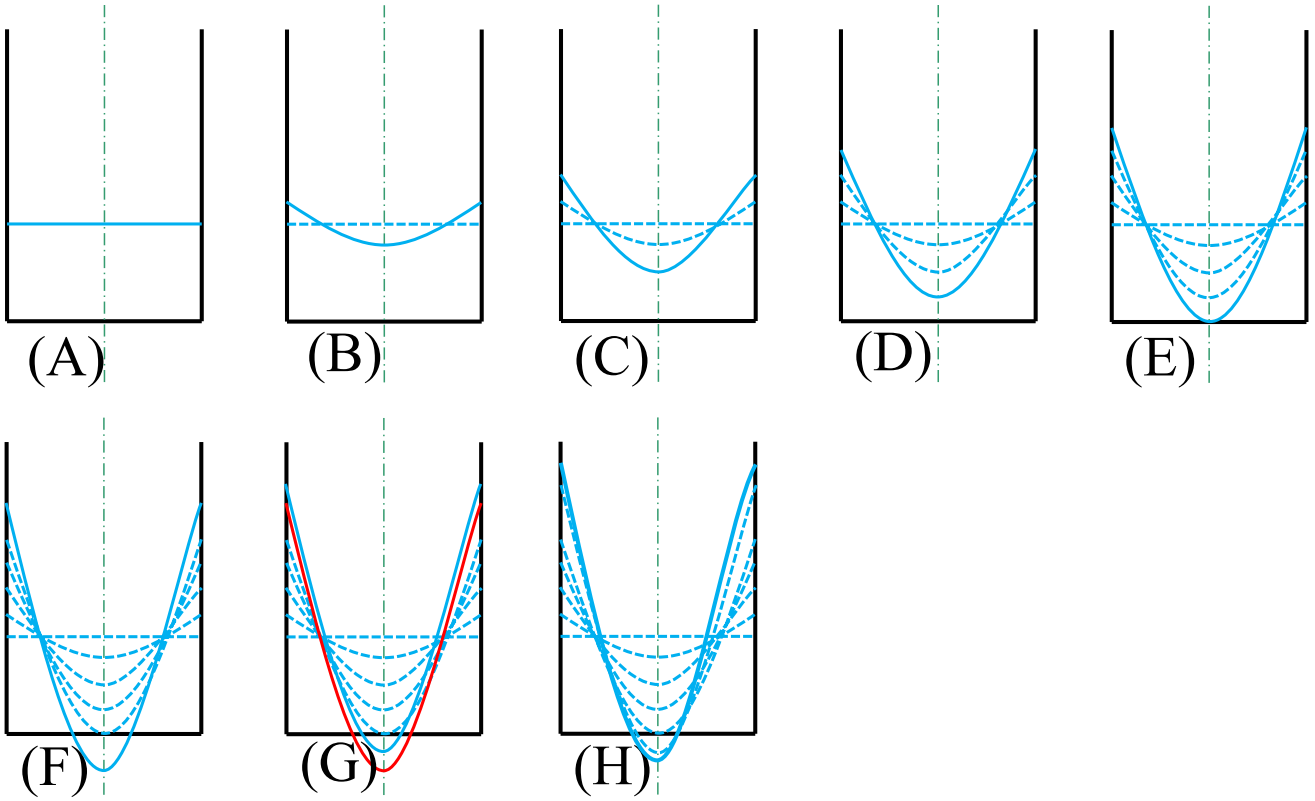
با دوران ظرف حول محوری که از مرکز استوانه می‌گذرد، مایع به همان اندازه که در مرکز پائین می‌رود، در کناره‌ها بالا می‌آید.

$$h_1=\frac{\omega^2R^2}{4g}$$

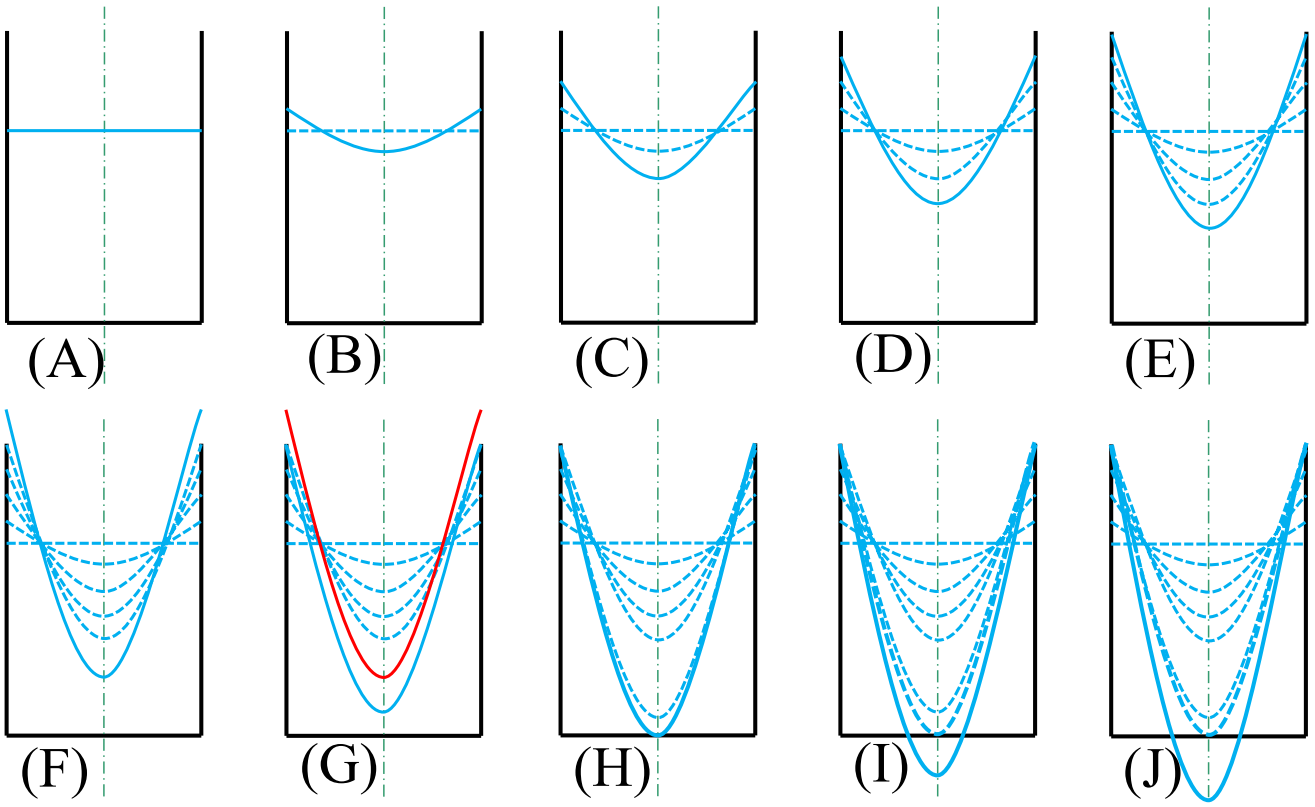
نکات مهم در حل مسائل حرکت با سرعت دورانی ثابت

- پروفیل سطح آزاد واقعی یا مجازی سیال و سایر سطوح هم‌فشار الزاما از معادله سهموی $h=\frac{\omega^2R^2}{2g}$ تبعیت می‌کند.
- توجه به حجم سیال و نقاط کنترل.
- گاهی محاسبه حجم فضای خالی از محاسبه حجم مایع راحت‌تر است.

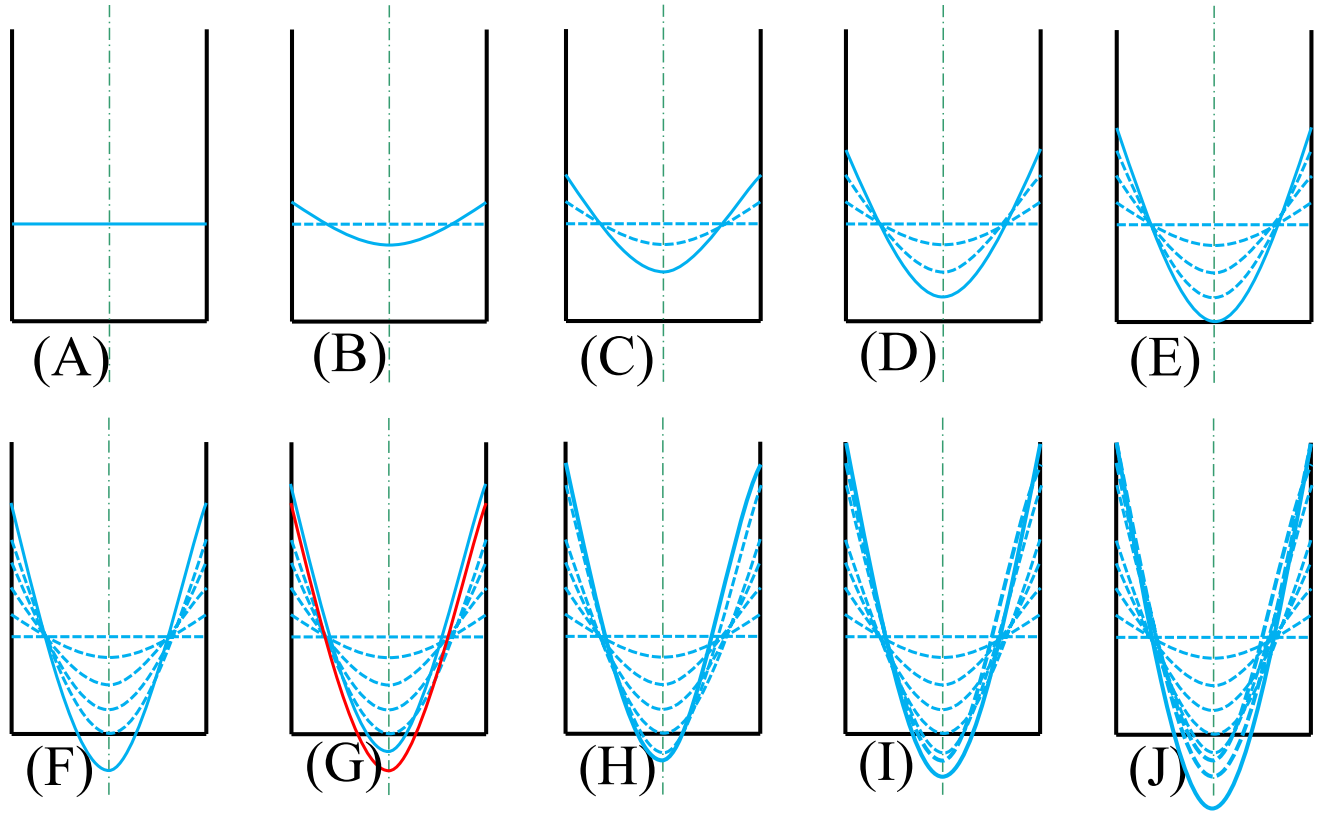
مثال ۱



مثال ۲

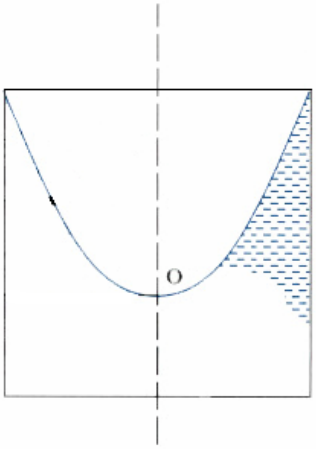


مثال ۱



مثال

استوانه به شعاع R=0.6m و ارتفاع 2m پر از آب است و حول محور مرکزی با سرعت زاویه‌ای ω=90 rpm می‌چرخد. چه حجمی از آب بیرون می‌ریزد؟ اگر سرعت زاویه‌ای 120 rpm باشد، چه حجمی از آب بیرون می‌ریزد؟



$$\omega = 90\ \text{rpm} = 90\ \frac{\text{round}}{\text{minutes}}\ \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{round}}\ \frac{1\ \text{minutes}}{60\ \text{s}} = 3\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$V_{out} = \frac{1}{2}V_{prism} = \frac{1}{2}\pi R^2 h = \frac{1}{2}\pi R^2\ \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g}$$

$$= \frac{\pi \times (3\pi)^2 \times 0.6^4}{4 \times 9.81} = 0.922\ \text{m}^3 = 922\ \text{lit}$$

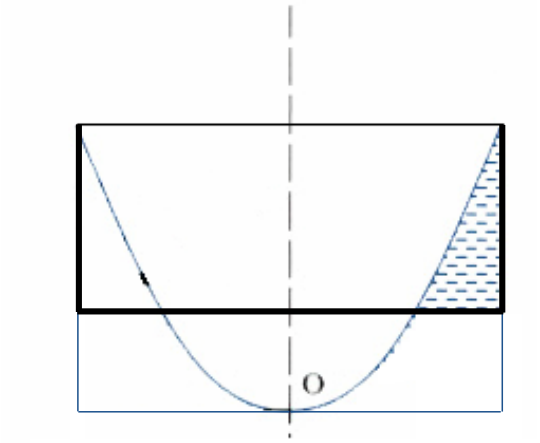
$$h = \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \frac{(3\pi)^2 \times 0.6^2}{2 \times 9.81} = 1.63\ \text{m}$$

مثال

سرعت زاویه‌ای که عمق حداقل صفر می شود:

$$\omega = \frac{\sqrt{2gh}}{R} = \frac{\sqrt{2\times 9.81 * 2}}{0.6} = 10.44 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 99.69 \,\text{rpm}$$

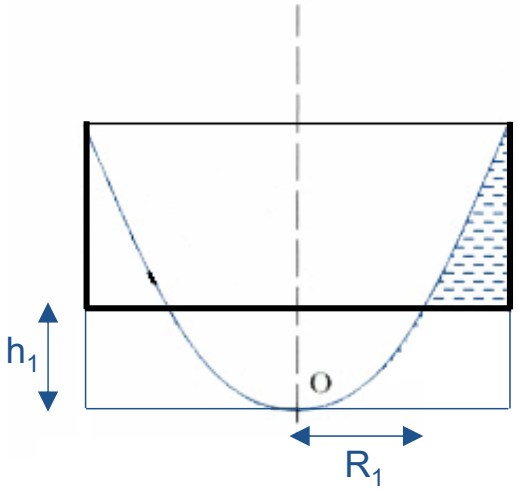
$$\omega = 120 \,\text{rpm} = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \qquad h = \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \frac{(4\pi)^2 \times 0.6^2}{2\times 9.81} = 2.89 \,\text{m}$$



مثال

$$h_1 = h - 2 = 2.89 - 2 = 0.89 \,\text{m}$$

$$R_1 = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\omega} = \frac{\sqrt{2\times 9.81\times 0.89}}{4\pi} = 0.33 \,\text{m}$$



$$V_{out} = \left(V_{parabola}\right)_{large} - \left(V_{parabola}\right)_{small}$$

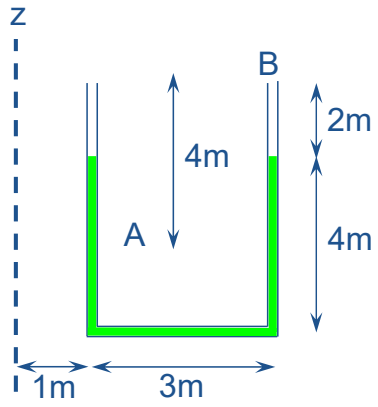
$$= \left[\frac{1}{2}\pi R^2 h\right] - \left[\frac{1}{2}\pi R_1^2 h_1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\pi\left(R^2 h - R_1^2 h_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\pi\left(0.6^2 \times 2.89 - 0.33^2 \times 0.89\right) = 1.482 \,\text{m}^3$$

مثال

در لوله U شکل زیر، سرعت زاویه‌ای حول محوری که بفاصله 1 m از لولـه قـرار دارد، چقدر باشد تا آب به لبه لوله خارجی برسد؟



$$p_A = \frac{\rho\omega^2 r_A^{\,2}}{2} - \rho g z_A + p_0$$

$$p_B = \frac{\rho\omega^2 r_B^{\,2}}{2} - \rho g z_B + p_0$$

$$p_B - p_A = \frac{\rho\omega^2}{2}\left(r_B^{\,2} - r_A^{\,2}\right) - \rho g\left(z_B - z_A\right)$$

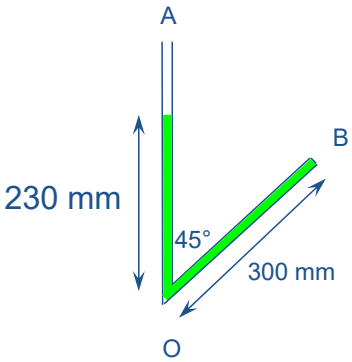
$$z_B - z_A = \frac{\omega^2}{2g}\left(r_B^{\,2} - r_A^{\,2}\right)$$

$$4 = \frac{\omega^2}{2\times 9.81}\left(4^2 - 1^2\right) \Rightarrow \boxed{\omega = 2.287\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

مثال

لوله خمیده شکل مقابل از آب پر شده و درا نتهای B بسته است.

- سرعت دوران حول محو OA چقدر باشد، تا فشار در نقاط O و B برابر شود؟
- در این حالت فشار در نقطه B چقدر خواهد بود؟
- در چه صورت فشار در نقطه O صفر خواهد شد؟



$$p_B - p_O = \frac{\rho\omega^2}{2}\left(r_B^{\,2} - r_O^{\,2}\right) - \rho g\left(z_B - z_O\right)$$

$$z_B - z_O = \frac{\omega^2}{2g}\left(r_B^{\,2} - r_O^{\,2}\right)$$

$$300\times\sin 45^\circ = \frac{\omega^2}{2\times 9810}\left(\left(300\times\cos 45^\circ\right)^2 - 0^2\right) \Rightarrow \boxed{\omega = 9.617\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

$$p_B = p_O = 0 - \rho g z = 1000\times 9.81\times 0.230 = 2.256\,\text{kPa}$$