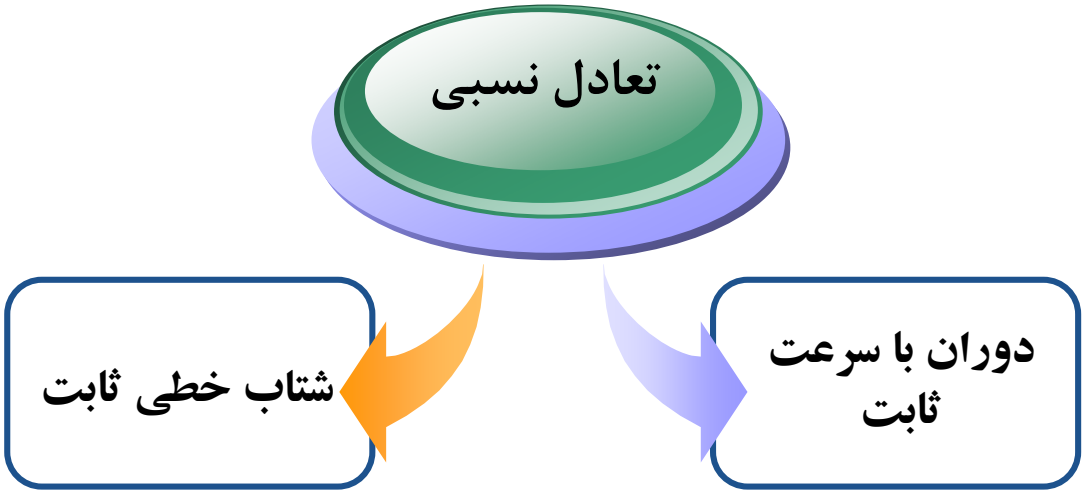
مکانیک سیالات

تعادل نسبی (شتاب خطی ثابت)

www.hadian.ir

محمدرضا هادیان
دانشگاه یزد – دانشکده مهندسی عمران

تعادل نسبی



تعادل نسبی

- **اگر ظرفی که سیال در آن قرار دارد:**
  - ساکن باشد
  - با سرعت خطی ثابت حرکت کند.

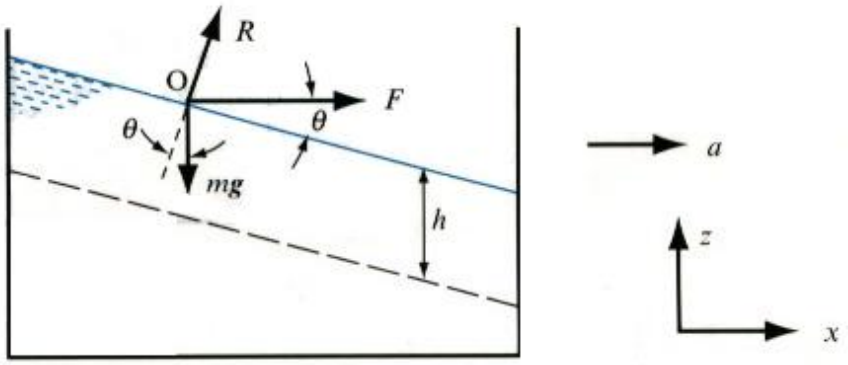
سیال تحت تأثیر حرکت ظرف نیست.

  - با شتاب خطی ثابت حرکت کند.
  - با سرعت دورانی ثابت حرکت کند.

- اثر حرکت ظرف به سیال منتقل می‌شود و بر توزیع فشار در ظرف تأثیر می‌گذارد.
- چون مایع نسبت به ظرف ساکن است، حرکت نسبی در لایه‌های سیال نداریم.

تنش برشی در سیال صفر است.

توزیع فشار در تعادل نسبی با شتاب خطی ثابت افقی

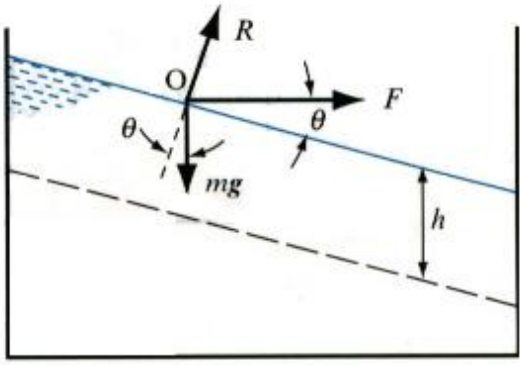


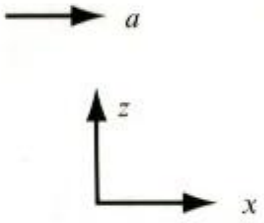
- **برای ذره سیال به جرم m روی سطح آزاد و باشتاب افقی a**
  - از قانون دوم نیوتن: $F = ma$
  - نیروی F برآیند وزن و نیروی فشاری R است. $F = mg\tan\theta$

$$R\cos\theta = mg \qquad R\sin\theta = F$$

$$\tan\theta = \frac{a}{g}$$

توزیع فشار در تعادل نسبی با شتاب خطی ثابت افقی

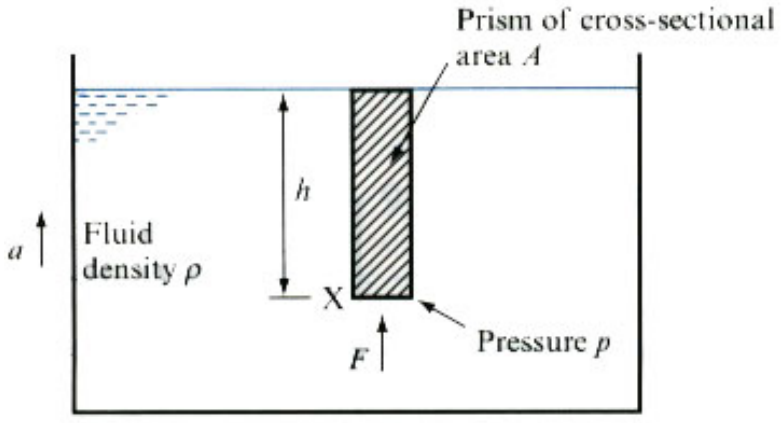




$$\tan\theta = \frac{a}{g}$$

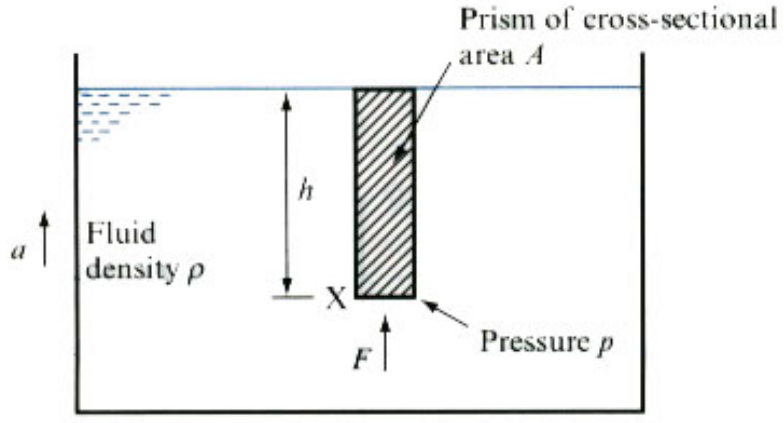
- سطح آزاد یک صفحه صاف با زاویه θ نسبت به افق است.
- چون شتاب افقی است، نیروهای قائم تغییر نمی‌کنند و فشار در هر نقطه به عمق h برابر با $\rho g h$ است.
- صفحات هم‌فشار به موازات سطح آزاد قرار دارند.

توزیع فشار در تعادل نسبی با شتاب خطی ثابت قائم



- درصورتیکه تنها شتاب قائم داشته باشیم، سطح آزاد افقی باقی می‌ماند.
- المانی را بصورت منشور با سطح مقطع ثابت A در نظر می‌گیریم.

توزیع فشار در تعادل نسبی با شتاب خطی ثابت قائم



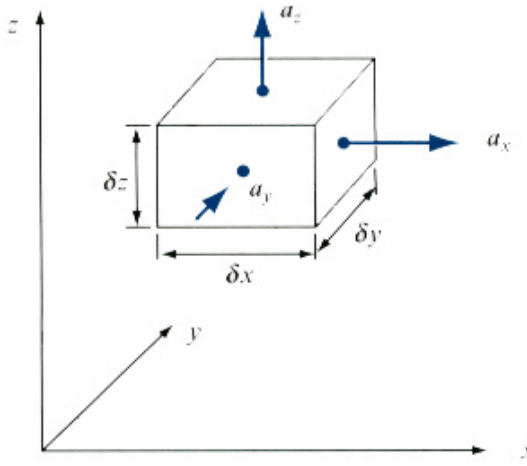
$$\text{upward acceleration force, F} = \text{force due to } p \text{ - weight of prism}$$
$$= pA - \rho ghA$$

- از قانون دوم نیوتن:

$$F = \text{mass of prism} \times \text{acceleration} = \rho hA \times a$$

$$pA - \rho ghA = \rho hAa \Rightarrow p = \rho gh\left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

حالت کلی توزیع فشار در تعادل نسبی

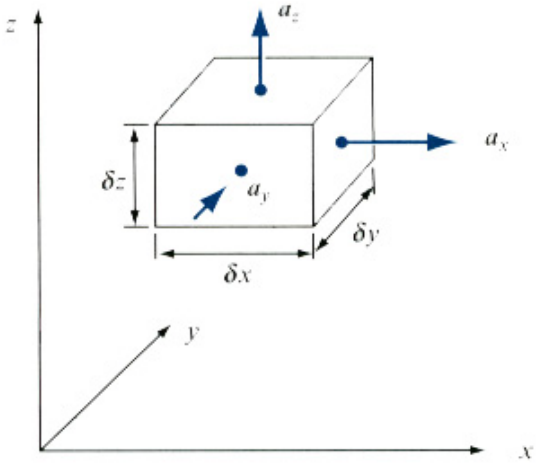


- $\partial p/\partial x$، $\partial p/\partial y$ و $\partial p/\partial z$ نرخ تغییرات فشار و a_x، a_y و a_z شتاب در راستای x و y و z است.

$$\text{Force in x direction, } F_x = p\,\delta y\,\delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)\delta y\,\delta z$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\,\delta y\,\delta z$$

حالت کلی توزیع فشار در تعادل نسبی



$$F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\,\delta y\,\delta z$$

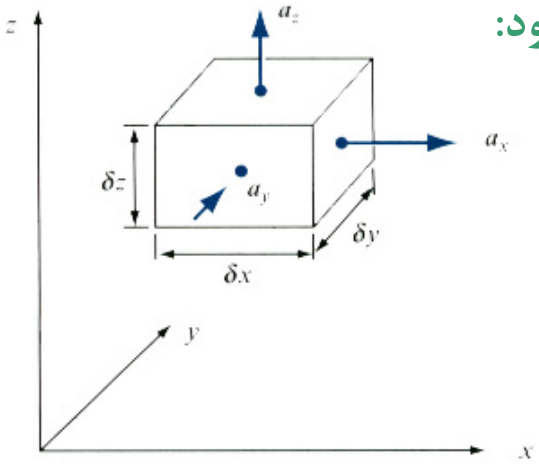
- بر اساس قانون دوم نیوتن:

$$F_x = \rho\,\delta x\,\delta y\,\delta z \times a_x$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\, a_x$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\, a_y$$

حالت کلی توزیع فشار در تعادل نسبی



- بر ای جهت قائم (z) اثر وزن را نیز باید منظور نمود:

$$F_z = p\,\delta x\,\delta y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\delta z\right)\delta x\,\delta y - \rho\, g\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial z}\delta x\,\delta y\,\delta z - \rho\, g\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

- از قانون نیوتن:

$$F_z = \rho\,\delta x\,\delta y\,\delta z \times a_z$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho\left(g + a_z\right)$$

حالت کلی توزیع فشار در تعادل نسبی

- برای هر امتداد s در صفحه x-z که با امتداد افق زاویه φ بسازد.

$$a_x = a_s \cos\varphi$$
$$a_z = a_s \sin\varphi$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

- برای سطح آزاد و تمامی صفحات با فشار ثابت، $dp=0$ است.
- اگر θ زاویه صفحه فشار ثابت با افق باشد: $\tan\theta = dz/dx$

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial z}dz = 0 \quad \xrightarrow{\frac{dz}{dx} = \tan\theta} \quad \tan\theta = -\frac{\partial p}{\partial x}\Big/\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\tan\theta = -\frac{a_s \cos\varphi}{g + a_s \sin\varphi}$$

$$\tan\theta = -\frac{a_x}{g + a_z}$$

حالت کلی توزیع فشار در تعادل نسبی

$$\tan\theta = -\frac{a_s \cos\varphi}{g + a_s \sin\varphi}$$

- برای شتاب افقی: $\varphi=0$ $\Leftarrow$ $\tan\theta = -\frac{a_s}{g}$
- برای شتاب قائم: $\varphi=90^\circ$ $\Leftarrow$ $\theta = 0$ $\Leftarrow$ سطح آزاد افقی است.

حالت کلی توزیع فشار در تعادل نسبی

- برای حالت دوبعدی:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

$$p = \int dp = \int \frac{\partial p}{\partial x}dx + \int \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(g + a_z)$$

$$p = \int(-\rho a_x)dx + \int[-\rho(g + a_z)]dz$$

$$p = -\rho a_x x - \rho(g + a_z)z + p_0$$

$$m = -\frac{a_x}{g + a_z}$$

$$z = -\frac{a_x}{g + a_z}x + \frac{p_0 - p}{\rho g(1 + a_z/g)}$$

حالت کلی توزیع فشار در تعادل نسبی

$$a_x = a_s \cos\varphi$$

$$a_z = a_s \sin\varphi$$

$$p = -\rho a_s \cos\varphi\, x - \rho(g + a_s \sin\varphi)z + p_0$$

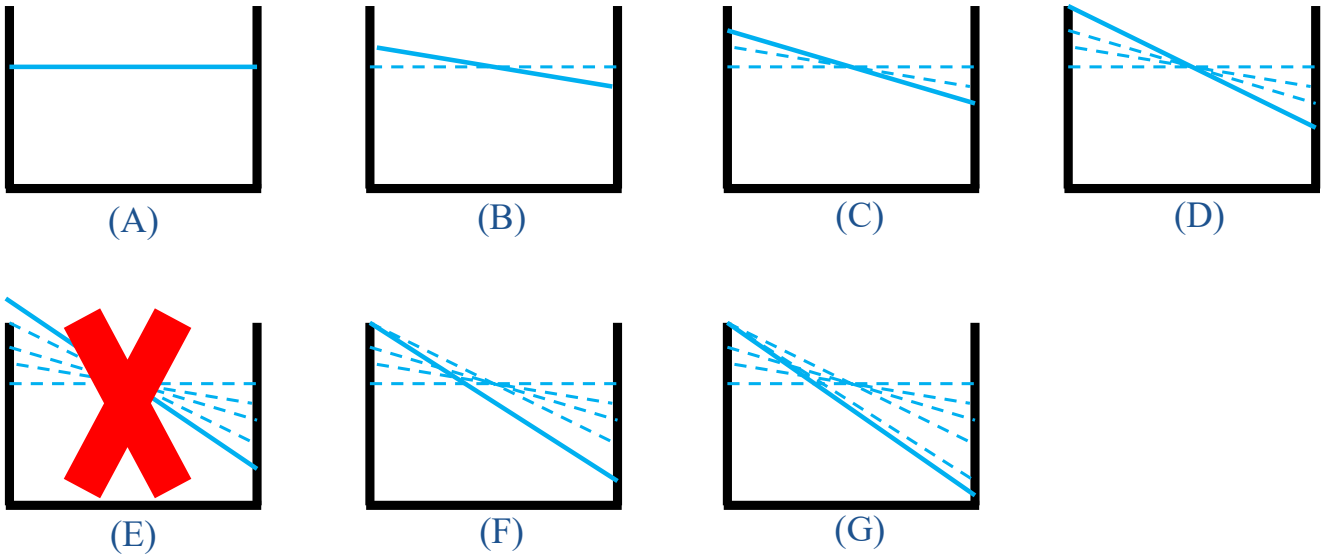
$$z = -\frac{a_s \cos\varphi}{g + a_s \sin\varphi}x + \frac{p_0 - p}{\rho g(1 + a_s \sin\varphi/g)}$$

$$m = -\frac{a_s \cos\varphi}{g + a_s \sin\varphi}$$

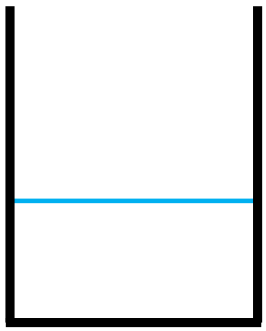
نکات مهم در حل مسائل حرکت با شتاب خطی ثابت

- شیب سطح آزاد واقعی یا مجازی و سایر سطوح هم فشار الزاماً از رابطه $m = -\frac{a_x}{g + a_z}$ تبعیت می‌کند.
- توجه به حجم سیال و نقاط کنترل.
- گاهی محاسبه حجم فضای خالی از محاسبه حجم مایع راحت‌تر است.

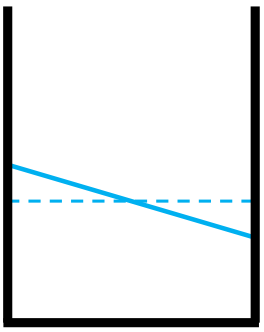
مثال ۱



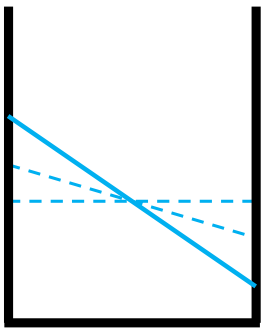
مثال ۲



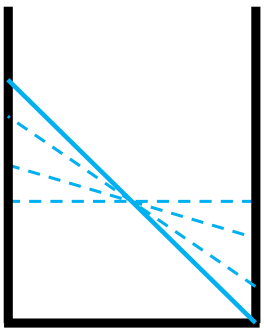
(A)



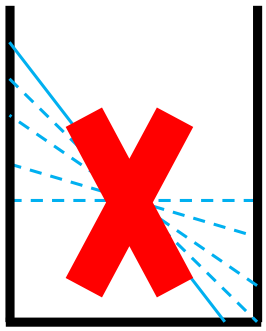
(B)



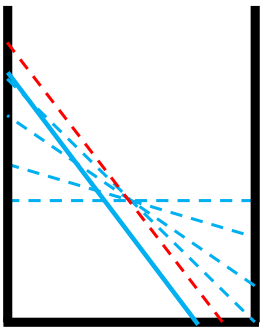
(C)



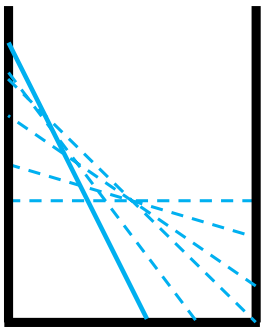
(D)



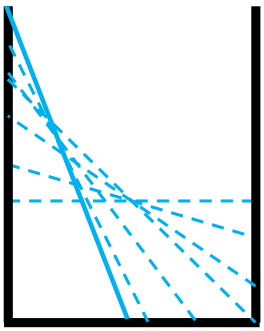
(E)



(F)



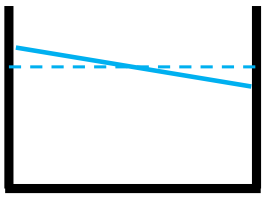
(G)



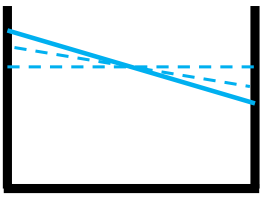
(H)

مثال ۱

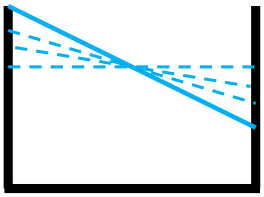
(A)



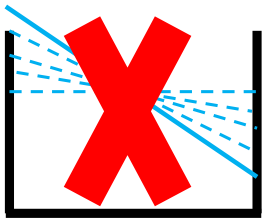
(B)



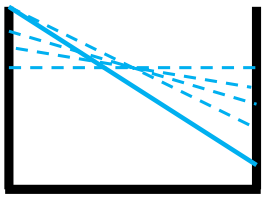
(C)



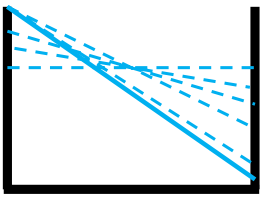
(D)



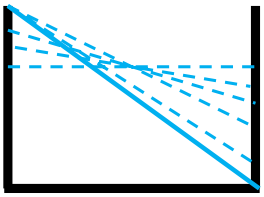
(E)



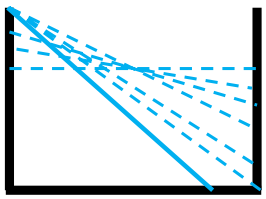
(F)



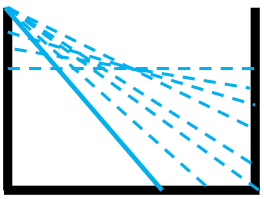
(G)



(H)



(I)



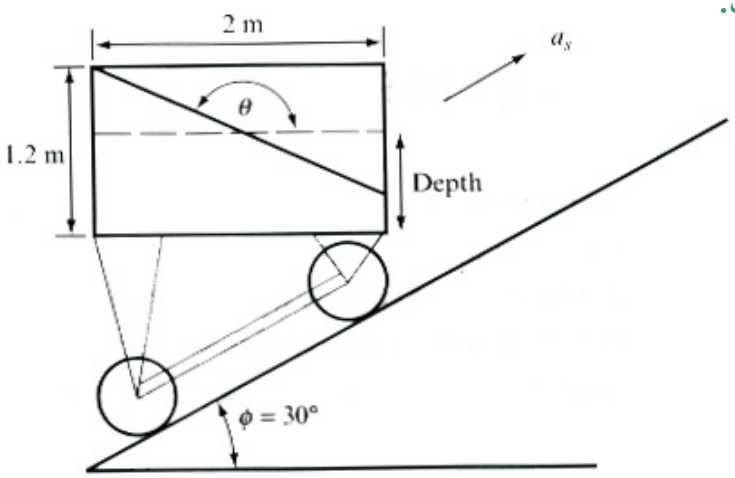
(J)

مثال

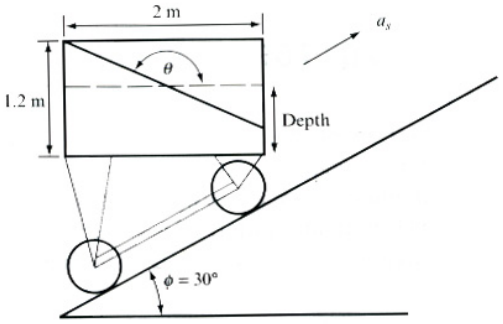
مطابق شکل، گاری به عمق 1.2m و طول 2m برای انتقال آب به بالای یک سطح شیب‌دار با زاویه ۳۰ درجه استفاده می‌شود. زاویه سطح آب با افق را برای حالت‌های زیر حساب کنید:

- در شروع حرکت گاری از پائین با شتاب موازی کف به میزان $4\ \mathrm{m/s^2}$
- گاری با شتاب کندشونده موازی کف به میزان $4.5\ \mathrm{m/s^2}$ به سمت بالا حرکت کند.

حداکثر عمق آب در گاری چقدر باشد، تا در هیچ‌یک از حالت‌های فوق آبی از آن بیرون نریزد.



مثال



$$a_s = +4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\tan\theta_A = m_A = -\frac{a_s\cos\varphi}{g + a_s\sin\varphi} = -\frac{4\cos 30^\circ}{9.81 + 4\sin 30^\circ}$$

$$= -0.2933$$

$$\boxed{\theta_A = 163^\circ 39'}$$

$$a_s = -4.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\tan\theta_R = m_R = -\frac{a_s\cos\varphi}{g + a_s\sin\varphi} = -\frac{(-4.5)\cos 30^\circ}{9.81 - 4.5\sin 30^\circ}$$

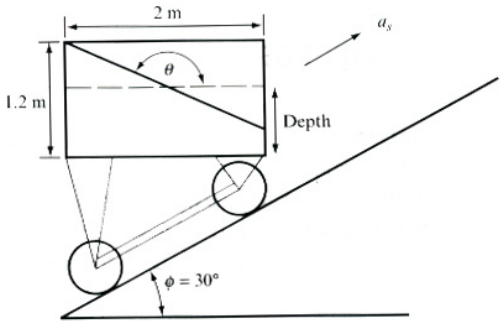
$$= 0.5154$$

$$\boxed{\theta_R = 27^\circ 16'}$$

مثال

$$\theta_A = 163^\circ 39'$$
$$180 - \theta_R = 152^\circ 44'$$

حالت دوم بحرانی است.

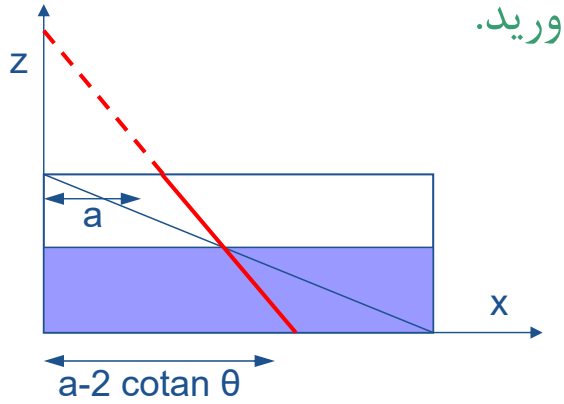


$$1.2 = \text{Depth} + \frac{1}{2}\text{Length} \times \tan\theta$$
$$1.2 = \text{Depth} + \frac{1}{2} 2 \times 0.5154$$

$$\boxed{\text{Depth} = 0.6846 \text{ m}}$$

مثال

یک جعبه بسته به سطح قاعده ۶×۶ متر و ارتفاع ۲ متر، تا نصف از آب پر شده است. اگر به این ظرف شتاب افقی g/2 و شتاب قائم g/4- وارد شود، معادله توزیع فشار در کف ظرف را بدست آورید.



$$\tan\theta = -\frac{a_x}{g + a_z}$$

$$\tan\theta = -\frac{g/2}{g - g/4} = -\frac{2}{3}$$

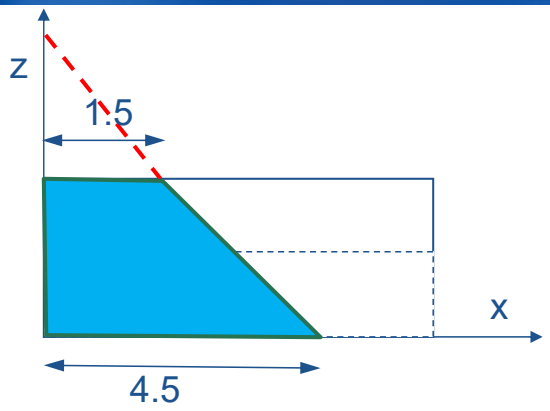
اگر سطح آب به لبه دیوار برسد:

$$\tan\alpha = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\alpha < \theta$$

$$\text{Volume of water} = 6 \times 6 \times 1 = \frac{a + \left(a - 2 \times \overbrace{\text{cotan}\,\theta}^{-3/2} \right)}{2} \times 2 \times 6 \quad \Rightarrow \quad a = 1.5 \text{ m}$$

مثال



$$x > 4.5 \Rightarrow p = 0$$

$$p = -\rho a_x x - \rho (g + a_z) z + p_0$$

$$p = -\rho \frac{g}{2} x - \rho \left(g - \frac{g}{4} \right) z + p_0$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 4.5\,\mathrm{m} \\ z = 0 \end{array}\right\} p = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -\rho \frac{g}{2} 4.5 - \rho \left(g - \frac{g}{4} \right) \times 0 + p_0$$

$$p_0 = \rho \frac{g}{2} 4.5 \quad \Rightarrow \quad p = -\rho \frac{g}{2} x - \rho \left(g - \frac{g}{4} \right) z + \rho \frac{g}{2} 4.5$$

$$p = \rho \frac{g}{2} (4.5 - x) - \frac{3}{4} \rho g z \xrightarrow{z = 0} p = \rho \frac{g}{2} (4.5 - x)$$