مکانیک سیالات

نیروی وارد بر سطوح صاف

www.hadian.ir

محمدرضا هادیان
دانشگاه یزد – دانشکده مهندسی عمران

نیروی وارد بر سطوح

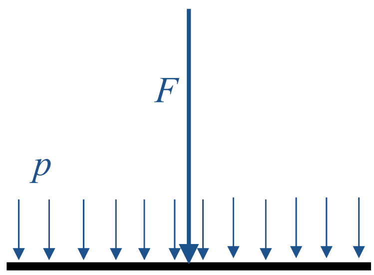
- نیروی وارد بر سطح از طرف سیال:
  - فشار وارد بر سطوح که بصورت توزیع فشار در نقاط مختلف سطح می‌باشد را می‌توان با یک نیرو که بر نقطه خاصی اثر می‌کند، معادل‌سازی نمود.
  - به محل اثر این نیرو مرکز فشار (Pressure Center)گویند.

نیروی وارد بر سطوح افقی

- **برای سطحی که بصورت افقی در سیال ساکن قرار گرفته:**
  - مقدار فشار در همه نقاط یکسان است.
  - امتداد اثر فشار در همه نقاط عمود بر سطح و بصورت قائم است.
  - می‌توان نیروی برآیند را انتگرال‌گیری بدست آورد:

$$F = \int p\,\overrightarrow{dA} = p\int \overrightarrow{dA} = p\int dA = pA$$

  - بزرگی نیروی وارد بر سطح برابر با pA، امتداد اثر آن در امتداد عمود بر صفحه و جهت آن رو به صفحه برای p مثبت است.

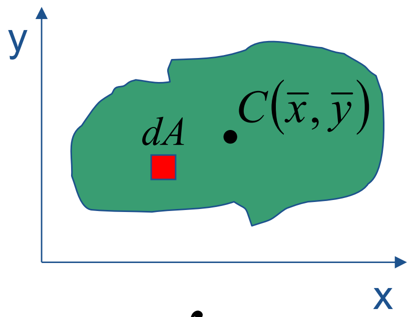


نقطه اثر نیروی برآیند وارد بر سطح افقی

- **نقطه اثر نیروی برآیند:**

نقطه‌ای است که مقدار گشتاور کلیه نیروی‌های وارد بر سطح حول هر محور گذرنده از این نقطه برابر با صفر باشد.

- گشتاور نیروی برآیند حول هر محوری باید برابر با گشتاور نیروی گسترده ناشی از فشار باشد. از جمله برای محور y:



$$pAx' = \int_A x p dA$$

$$x' = \frac{1}{A}\int_A x\,dA = \bar{x}$$

- برای محور x:

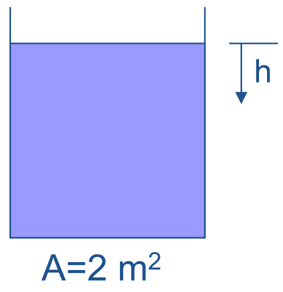
$$pAy' = \int_A y p dA$$

$$y' = \frac{1}{A}\int_A y\,dA = \bar{y}$$

برای سطح افقی که تحت فشار استاتیک قرار دارد، محل اثر نیروی برآیند از مرکز سطح می‌گذرد.

مثال

- برای ظرف شکل مقابل چنانچه عمق مایع 1 m و رابطه جـرم حجمـی بـا عمـق بصورت ρ=(a+bh)/g باشد، نیروی وارد بر کف ظرف چقدراست؟



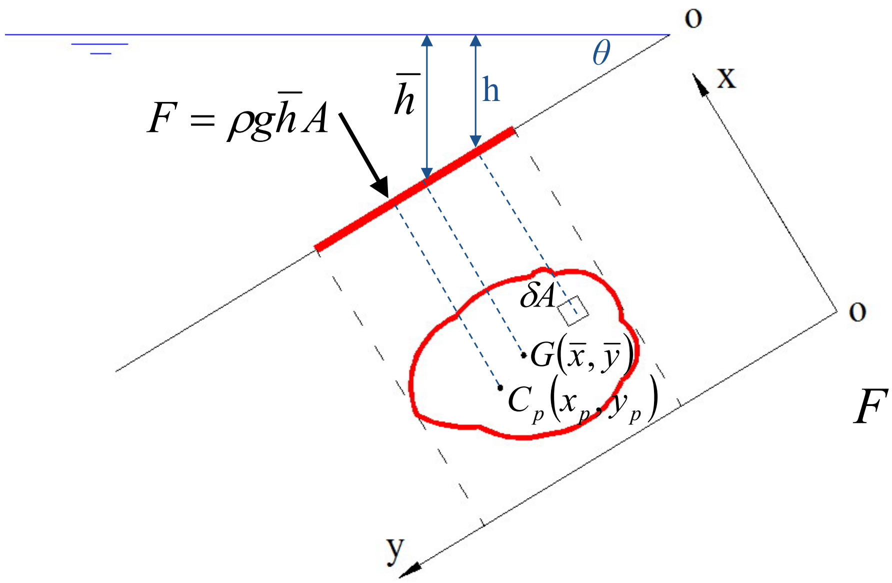
$$\frac{dp}{dh} = \rho g = \frac{a+bh}{g} g = a + bh$$

$$\int_0^p dp = \int_0^{h=1} (a+bh)\,dh = \left[ah + \frac{bh^2}{2}\right]_0^1 = a + \frac{b}{2}$$

$$F = pA = \left(a + \frac{b}{2}\right)2 = 2a + b$$

نیروی وارد بر سطوح مایل

- محورهای مختصات را صفحه خود سطح در نظر می‌گیریم.
- محور x را خط مشترک سطح آزاد و صفحه سطح مورد نظر می‌گیریم.
- برای یک المان از سطح:



$$\delta F = p\,\delta A = \rho g h\,\delta A = \rho g y \sin\theta\,\delta A$$

$$F = \int p\,dA = \int \rho g y \sin\theta\,dA$$

$$= \rho g \sin\theta \int y\,dA$$

$$= \rho g \underbrace{\sin\theta\,\bar{y}}_{\bar{h}} A$$

$$= \rho g \bar{h} A = p_G A$$

نیروی وارد بر سطوح مایل

- بزرگی نیروی وارد بر صفحه‌ای که بطور کامل در داخل سیال قرار دارد، برابر با حاصل‌ضرب مساحت صفحه در فشار وارد بر مرکز سطح آن است.
- نیازی نیست حتماً سطح آزاد وجود داشته باشد و به هر طریقی که فشار وارد بر مرکز سطح محاسبه شود، درست است.
- نیروی برآیند بر سطح صفحه عمود است و اگر P_G مثبت باشد، در جهتی است که به صفحه فشار وارد کند.
- اگر صفحه حول محوری که از مرکز سطح می‌گذرد دوران کند، مقدار نیرو کل وارد بر صفحه ثابت می‌ماند. (توجه شود که صفحه تماماً در داخل مایع قرار داشته باشد و در اثر دوران قسمتی از آن خارج نشود)
- اگر قسمتی از صفحه داخل مایع باشد، تنها قسمتی که در داخل مایع است، در محاسبات منظور می‌گردد.
- بر خلاف صفحه افقی، در صفحه مایل مرکز فشار و مرکز سطح بر هم منطبق نیستند.

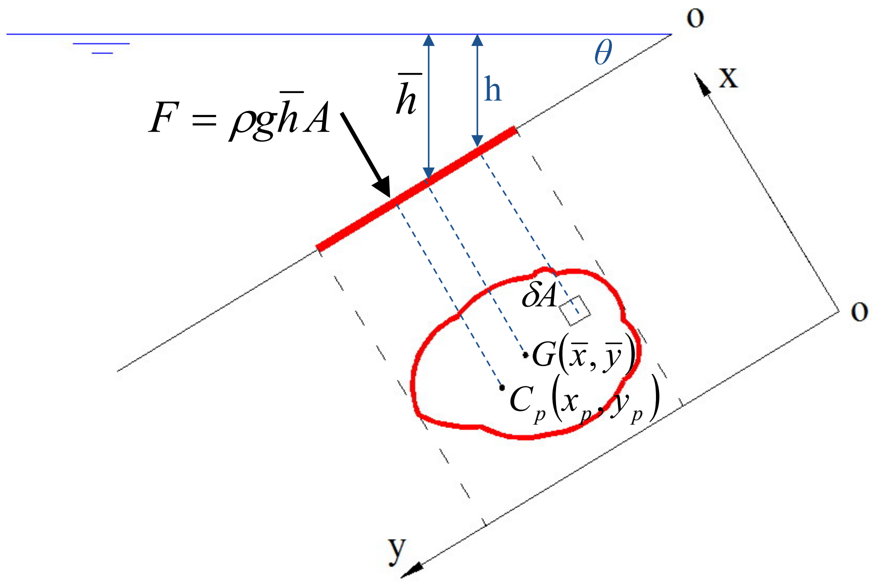
مرکز فشار برای سطوح مایل

$$x_p F = \int_A xp\, dA$$

$$y_p F = \int_A yp\, dA$$

$$x_p = \frac{1}{F}\int_A xp\, dA$$

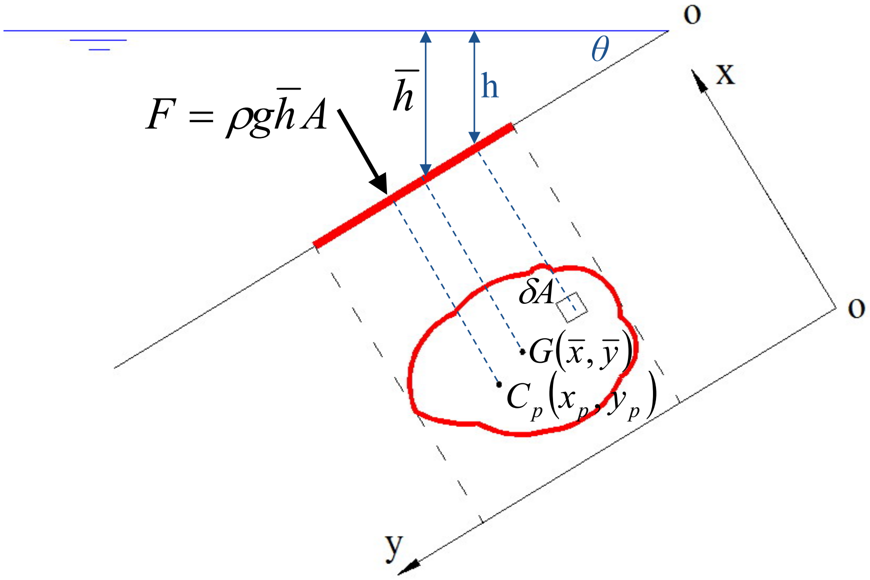
$$y_p = \frac{1}{F}\int_A yp\, dA$$



- عملاً اکثر مواقع، انتگرال‌گیری گرافیکی روش بهتری است ولی برای شکل‌های ساده می‌توان بدین صورت عمل کرد.

$$x_p = \frac{1}{\rho g\, \bar{y} A \sin\theta}\int_A x \underbrace{\rho g\, y \sin\theta}_{p}\, dA = \frac{1}{\bar{y}A}\int_A xy\, dA = \frac{I_{xy}}{\bar{y}A}$$

مرکز فشار برای سطوح مایل



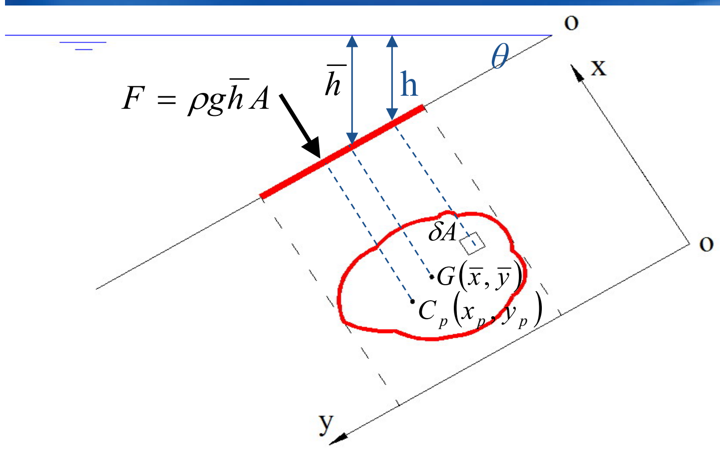
$$x_p = \frac{I_{xy}}{\bar{y}A} = \frac{\overline{I_{xy}}}{\bar{y}A} + \bar{x}$$

- اگر یکی از محورهای گذرنده از مرکز سطح (نقطه G) محور تقارن باشد: $\overline{I_{xy}} = 0$

$$x_p = \bar{x}$$

- $\overline{I_{xy}}$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد و لذا مرکز فشار ممکن است در هر یک از دو طرف مرکز سطح قرار گیرد.

مرکز فشار برای سطوح مایل



- برای محاسبه y مرکز فشار:

$$y_p = \frac{1}{\rho g\, \bar{y} A \sin\theta} \int_A y \underbrace{\rho g\, y \sin\theta\, dA}_{p}$$

$$= \frac{1}{\bar{y}A} \int_A y^2\, dA = \frac{I_{xx}}{\bar{y}A}$$

$$I_{xx} = I_G + \bar{y}^2 A$$

$$y_p = \frac{I_{xx}}{\bar{y}A} = \frac{I_G + \bar{y}^2 A}{\bar{y}A} = \frac{I_G}{\bar{y}A} + \bar{y}$$

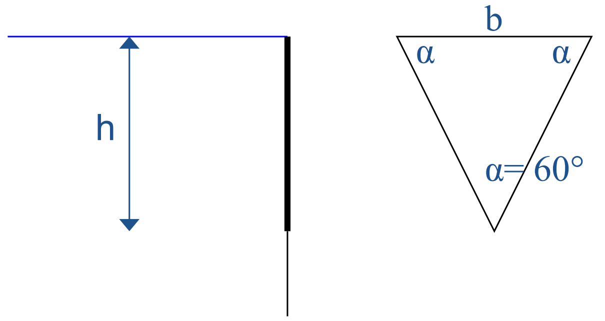
$$y_p = \frac{I_G}{\bar{y}A} + \bar{y}$$

$$\boxed{y_p - \bar{y} = \frac{I_G}{\bar{y}A}}$$

مرکز فشار همواره پائین‌تر از مرکز سطح قرار دارد.

مثال

- مقدار نیروی هیدرواستاتیک وارد بر دریچه مثلثی زیر و محل اثر آن را محاسبه کنید.



$$b = 2h\,\text{cotan}\,60^{\circ}$$

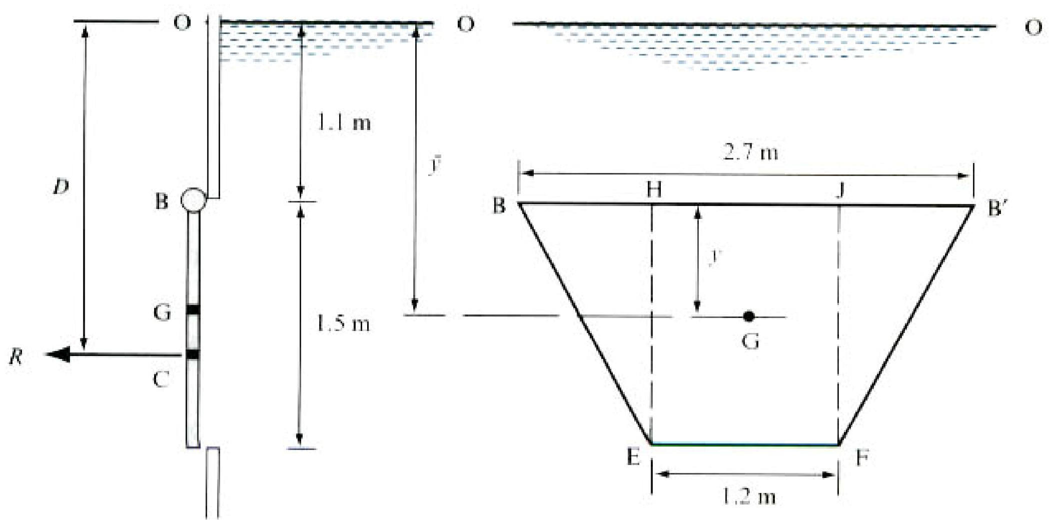
$$F = \rho g\,\bar{h}\,A = \rho g \frac{h}{3}\frac{bh}{2} = \frac{\rho g b h^2}{6} = \frac{\rho g}{3} h^3 \text{cotan}\,60^{\circ}$$

due to symetry, $x_p = 0$

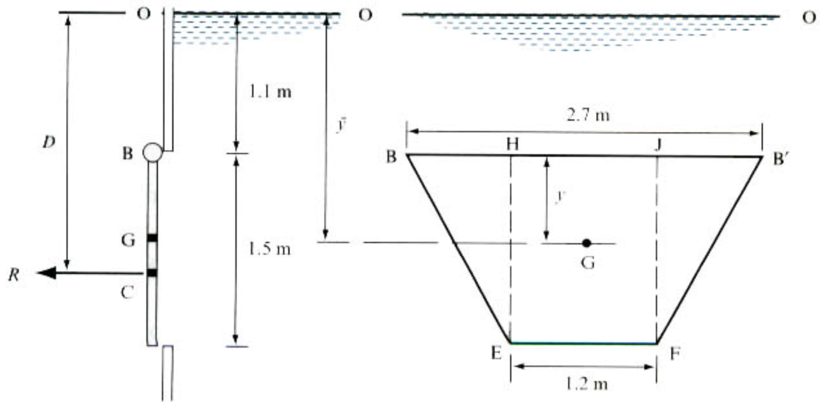
$$y_p = \frac{I_G}{\bar{y}A} + \bar{y} = \frac{\frac{bh^3}{36}}{\frac{h}{3}\frac{bh}{2}} + \frac{h}{3} = \frac{h}{6} + \frac{h}{3} = \frac{h}{2}$$

مثال

- مطابق شکل دریچه ذوزنقه‌ای شکل در دیواره قائم مخزنی نصب شده و در لبه فوقانی لولا شده است. برای ابعاد نشان داده شده، گشتاور لازم برای بسته‌نگه‌داشتن دریچه را حساب کنید.



مثال



- مساحت دریچه:

$$A = \frac{1}{2}(2.7 + 1.2) \times 1.5 = 2.925\,\text{m}^2$$

- مرکز سطح دریچه:

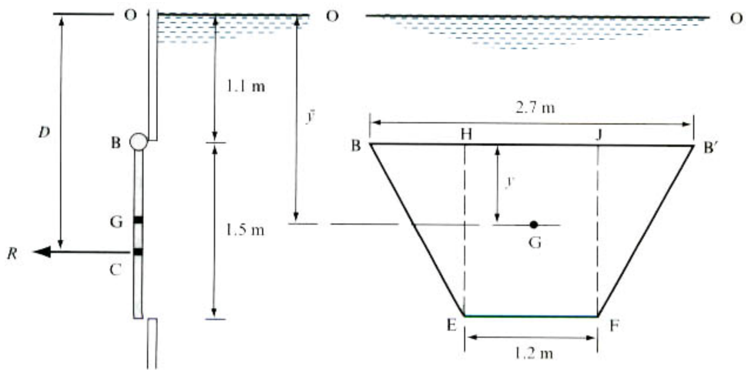
$$A \times y = \text{Moment of areas BHE and FJB}' + \text{Moment of EFJH}$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1.5 \times \overbrace{\frac{2.7 - 1.2}{2}}^{0.75} \right) \times \frac{1.5}{3} + (1.2 \times 1.5) \times \frac{1.5}{2}$$

$$2.925 \times y = 0.5625 + 1.35 = 1.9125 \qquad y = 0.654\,\text{m}$$

$$\bar{y} = \text{y} + \text{OB} = 0.654 + 1.1 = 1.754\,\text{m}$$

مثال



- نیروی فشاری:

$$R = \rho g \bar{h} A = \rho g \bar{y} A$$
$$= 1000 \times 9.81 \times 1.754 \times 2.925$$
$$= 50.33\,\text{kN}$$

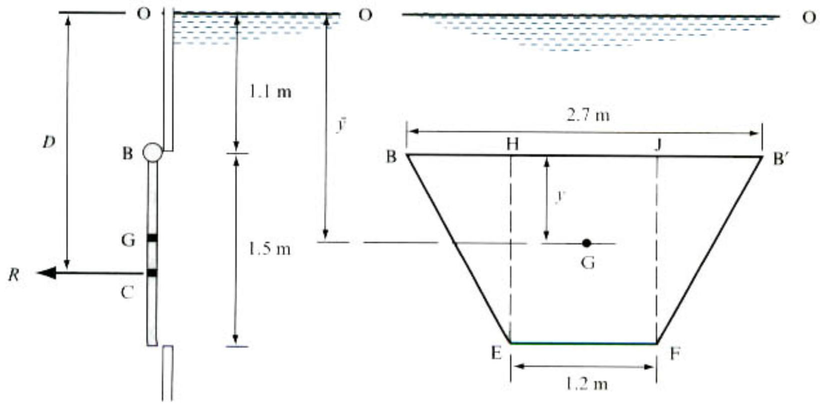
- محاسبه مرکز فشار:

$$I_{xx} = I_G + \bar{y}^2 A = (I_{xx})_{\text{rectangle}} + (I_{xx})_{\text{triangle}}$$

$$= \left\{ \underbrace{\frac{1.2 \times 1.5^3}{12}}_{(I_G)_{\text{rectangle}}} + \left[\underbrace{1.2 \times 1.5}_{(A)_{\text{rectangle}}} \times \underbrace{\left(1.1 + \frac{1.5}{2}\right)^2}_{(\bar{y})_{\text{rectangle}}} \right] \right\}$$

$$+ \left\{ \underbrace{\frac{1.5 \times 1.5^3}{36}}_{(I_G)_{\text{triangle}}} + \left[\underbrace{\frac{1.5 \times 1.5}{2}}_{(A)_{\text{triangle}}} \times \underbrace{\left(1.1 + \frac{1.5}{3}\right)^2}_{(\bar{y})_{\text{triangle}}} \right] \right\} = 9.5186\,\text{m}^4$$

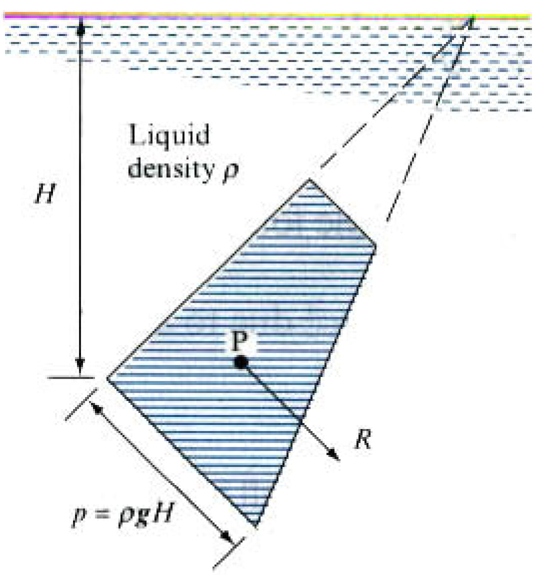
مثال



$$D = y_p = \frac{I_{xx}}{\bar{y}A} = \frac{9.5186}{2.925 \times 1.754} = 1.8553\,\text{m}$$

$$M = R \times BC = 50.33 \times (1.8553 - 1.1) = 38.01\ \text{kNm}$$

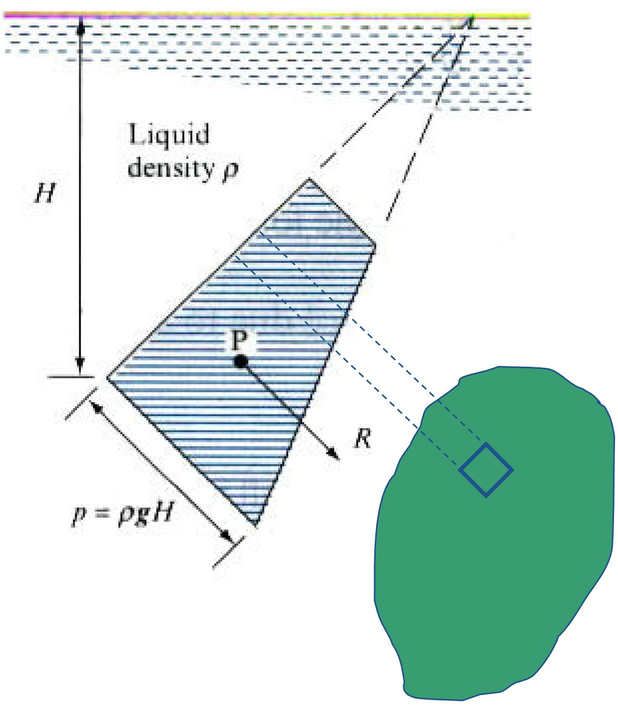
منشور فشار



- نیروی وارد از طرف سیال بر سطح و همچنین مرکز فشار را می‌توان بصورت گرافیکی برای دیوارها و سطوح صاف حساب کرد.

- چنانچه برای سطحی که محاسبه نیرو روی آن مدنظر است، دیاگرام فشار را روی سطح رسم کنیم، یک شکل منشوری بدست می‌آید که قاعده آن سطح مورد نظر و ارتفاع آن در هر نقطه برابر با فشار در آن نقطه است و به آن منشور فشار گویند.

منشور فشار



$$\delta V = \overbrace{\rho g h}^{p}\,\delta A = \delta F$$

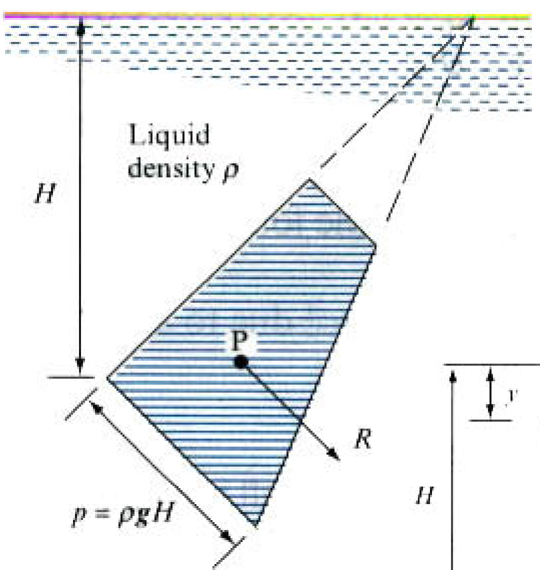
$$V = \int \delta V = \int \delta F = F$$

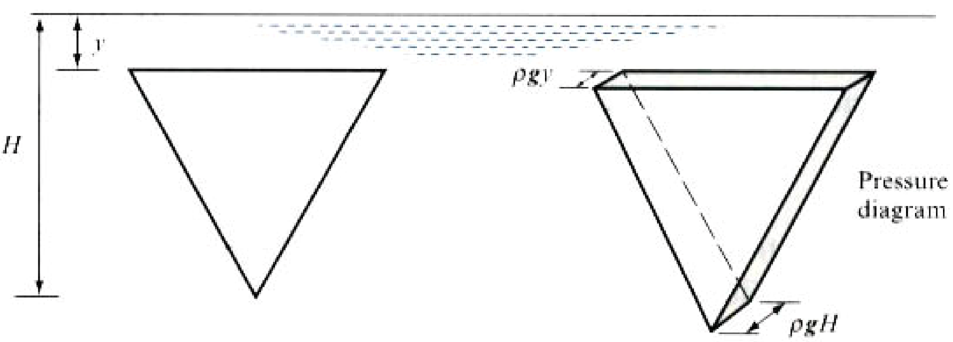
$$x_p = \frac{1}{F}\int_A x\,\overbrace{p\,dA}^{dV} = \frac{1}{V}\int_A x\,dV$$

$$y_p = \frac{1}{F}\int_A y\,\overbrace{p\,dA}^{dV} = \frac{1}{V}\int_A y\,dV$$

منشور فشار

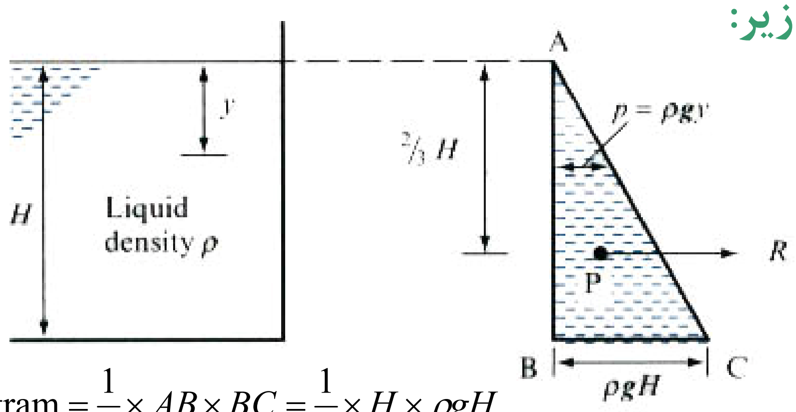
- حجم منشور فشار برابر با نیروی وارد بر سطح و تصویر مرکز حجم آن روی سطح، همان مرکز فشار است.
- همیشه استفاده از روش منشور فشار بهترین راه حل نیست!





مثال

- مطلوبست برآورد مقدار نیروی فشاری در واحد عرض و محل اثر آن روی دیواره مخزن شکل زیر:



$$\text{Area of pressure digram} = \frac{1}{2}\times AB\times BC = \frac{1}{2}\times H\times \rho gH$$

$$\text{R} = \frac{1}{2}\rho gH^2 \ \text{per unit width} \qquad \text{pressure center} = \text{centroid of pressure diagram}$$

$$= \frac{2}{3}H \ \text{from free surface}$$

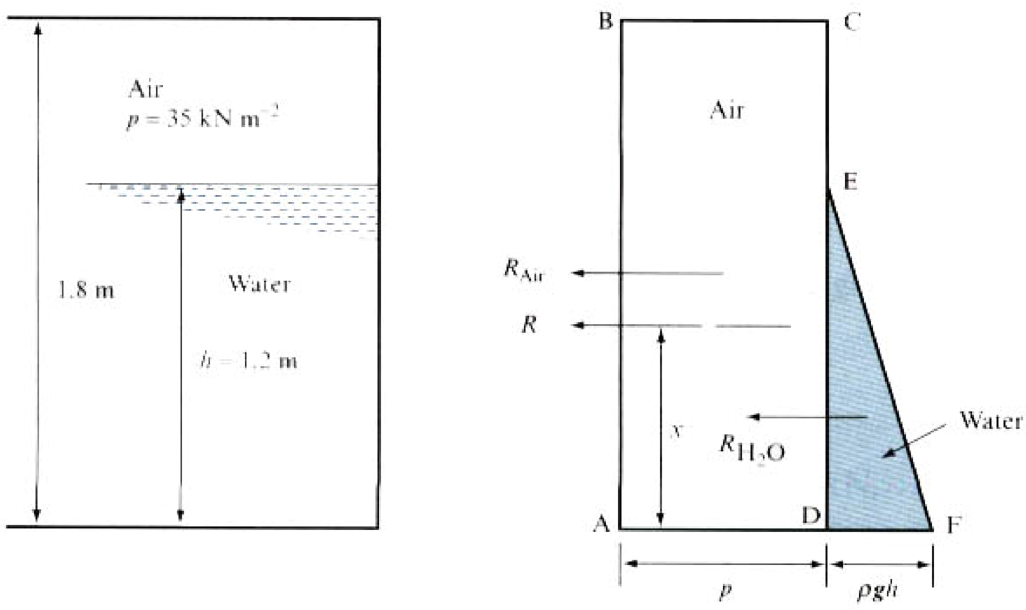
- از روابط قبل داریم:

$$\text{R} = \rho gA\bar{y} = \rho g(H\times 1)\times\left(\frac{1}{2}H\right) = \frac{1}{2}\rho gH^2$$

$$y_p = \frac{I_G}{\bar{y}A} + \bar{y} = \frac{\frac{1\times H^3}{12}}{\frac{H}{2}(H\times 1)} + \frac{H}{2} = \frac{2}{3}H$$

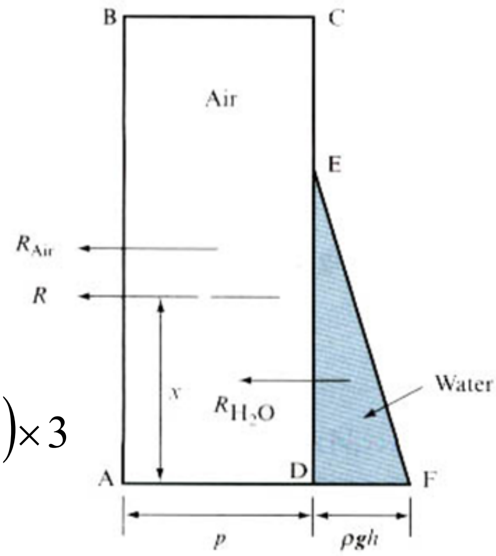
مثال

- تانک بسته‌ای مطابق شکل با مقطع مستطیلی و دیواره‌های قائم، دارای عمق 1.8m است و تا ارتفاع 1.2 m از آب پر شده است. هوا توسط پمپی به قسمت بالای مخزن تزریق می‌شود تا فشار هوا به 35kPa برسد. اگر پهنای یک دیواره مخزن 3m باشد، نیروی فشاری وارد بر دیواره و فاصله مرکز فشار تا کف مخزن را محاسبه کنید.



(a) (b)

مثال



$$\text{Force due to air, } R_{air} = (p \times AB) \times \text{width}$$
$$= 35 \times 10^3 \times 1.8 \times 3$$
$$= 189 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\text{Force due to water, } R_{water} = \frac{1}{2}(\rho gh \times DE) \times \text{width}$$
$$= \frac{1}{2}(10^3 \times 9.81 \times 1.2 \times 1.2) \times 3$$
$$= 21.19 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\text{Total force, } R = R_{airr} + R_{water} = (189 + 21.19) \times 10^3$$
$$= 210.19 \times 10^3 \text{ N}$$

$$R \times x = R_{air} \times 0.9 + R_{water} \times 0.4 \qquad x = \frac{189 \times 0.9 + 21 \times 0.4}{210.19} = 0.85 \text{ m}$$