

مکانیک سیالات

فشار و ارتفاع معادل فشار

www.hadian.ir



محمدرضا هادیان

دانشگاه یزد - دانشکده مهندسی عمران

فشار در سیالات

● سیال در راستای عمود بر هرمرز جامد یا صفحه فرضی، نیرو وارد می کند که اصطلاحاً فشار سیال نامیده می شود و بصورت نیرو در واحد سطح تعریف می گردد.

● فشار سیال در نقاط مختلف می تواند با یکدیگر متفاوت باشد.

● اگر نیروی وارد بر واحد سطح در همه المان های سطح مورد نظر یکسان باشد (فشار یکنواخت):

$$\text{pressure} = \frac{\text{Force exerted}}{\text{Area of boundary}} \quad \text{or} \quad p = \frac{F}{A}$$

● برای حالتی که فشار در نقاط مختلف متفاوت باشد:

$$\text{Mean pressure, } p = \frac{\delta F}{\delta A}$$

● در حالت حدی که مساحت المان به سمت نقطه میل کند
(اما به اندازه کافی بزرگ که مفهوم محیط پیوسته حفظ شود):

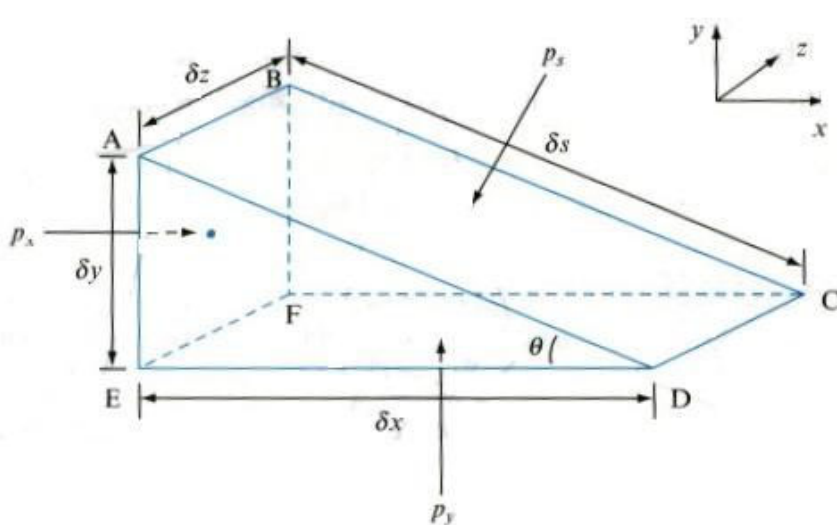
Pressure at a point,
$$p = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F}{\delta A} = \frac{dF}{dA}$$

❏ Unit: N/m²; bar (1 bar = 10⁵ N/m²)

❏ Dimension: ML⁻¹T⁻²

قانون پاسکال برای فشار در یک نقطه

● المانی بصورت یک گوه منشوری از سیال ساکن را بصورت زیر در نظر می گیریم:



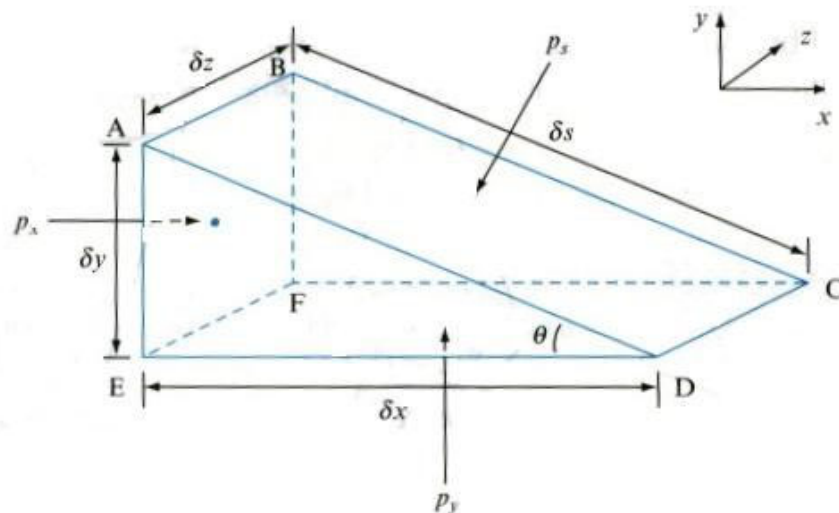
تبادل نیروها در جهت X:

Force due to $p_x = p_x \times \text{Area ABFE} = p_x \delta y \delta z$

Component of Force due to $p_s = -(p_s \times \text{Area ABCD}) \sin \theta$

$$= -p_s \delta s \delta z \frac{\delta y}{\delta s} = -p_s \delta y \delta z$$

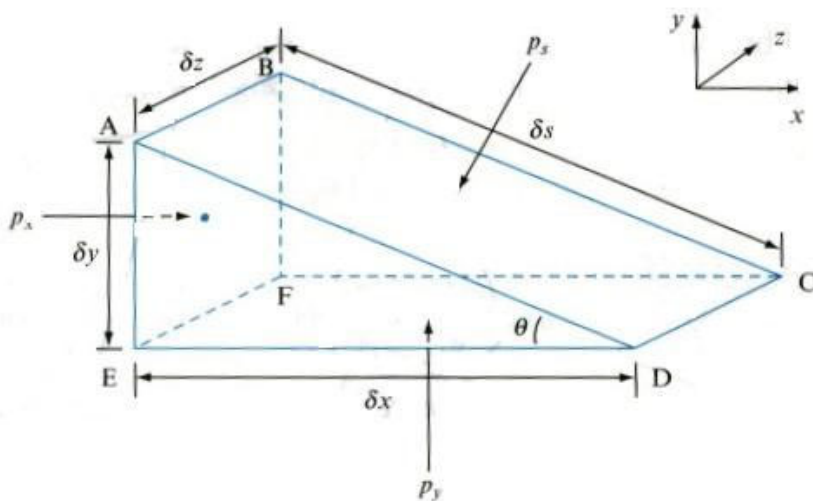
قانون پاسکال برای فشار در یک نقطه



$$p_x \delta y \delta z + (-p_s \delta y \delta z) = 0$$

$$p_x = p_s$$

قانون پاسکال برای فشار در یک نقطه



تعداد نیروها در جهت y:

$$\text{Force due to } p_y = p_y \times \text{Area CDEF} = p_y \delta x \delta z$$

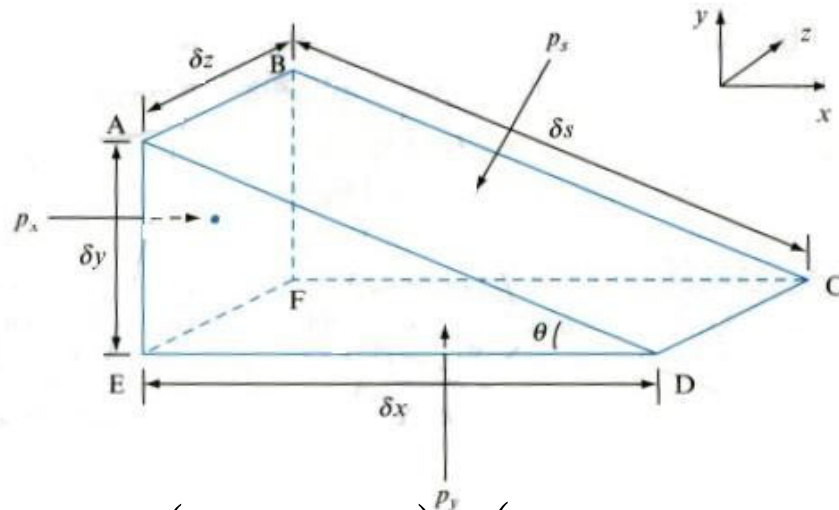
$$\text{Component of Force due to } p_s = -(p_s \times \text{Area ABCD}) \cos \theta$$

$$= -p_s \delta s \delta z \frac{\delta x}{\delta s} = -p_s \delta x \delta z$$

$$\text{Weight of element} = -\text{Specific weight} \times \text{Volume}$$

$$= -\rho g \times \frac{1}{2} \delta x \delta y \delta z$$

قانون پاسکال برای فشار در یک نقطه



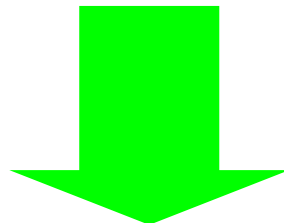
$$p_y \delta x \delta z + (-p_s \delta x \delta z) + \underbrace{\left(-\rho g \frac{1}{2} \delta x \delta y \delta z\right)}_{\approx 0} = 0$$

$$p_y = p_s$$

قانون پاسکال برای فشار در یک نقطه

بطور مشابه می توان برای جهت Z روابط قبل را اثبات کرد.

$$p_x = p_y = p_z = p_s$$



قانون پاسکال (Pascal law):

در یک نقطه از سیال ساکن فشار در همه جهتها با هم برابر است.

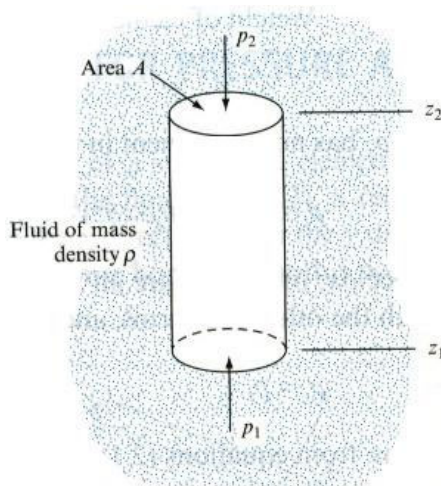
قانون پاسکال برای فشار در یک نقطه

● اگر سیال در حال حرکت داشته باشیم، بخاطر حرکت نسبی لایه‌ها تنش برشی داریم. در این حالت فشار بصورت متوسط تنش‌های نرمال در هر نقطه تعریف می‌شود.

● برای سیال فرضی غیرلزج (بدون اصطکاک)، تنش‌های برشی برابر صفر هستند و لذا برای سیال غیرلزج در حال حرکت هم فشار در همه جهتها با هم برابر است.

تغییرات فشار در راستای قائم برای سیال تحت اثر ثقل

المانی از سیال بصورت یک ستون قائم با مقطع ثابت A را در نظر می‌گیریم که اطراف آن بطور کامل با سیال پر شده است.



✿ فشار در وجه پائین به تراز z_1 برابر با p_1 است.

✿ فشار در وجه فوقانی به تراز z_2 برابر با p_2 است.

چون سیال ساکن است، المان باید در حالت تعادل باشد و جمع تمام نیروها در جهت قائم باید برابر با صفر باشد.

$$\text{Force due to } p_1 \text{ on area } A \text{ acting up} = p_1 \times A$$

$$\text{Force due to } p_2 \text{ on area } A \text{ acting down} = p_2 \times A$$

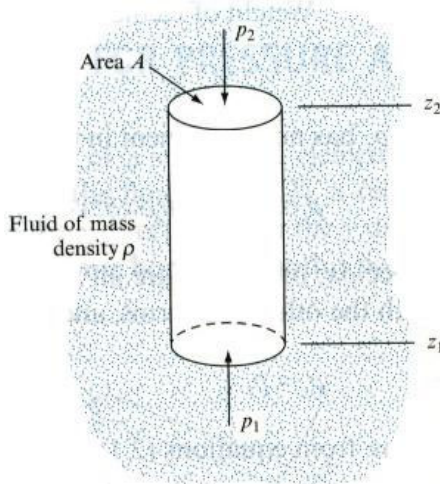
$$\text{Force due to weight of element} = mg$$

$$= \text{Mass density} \times g \times \text{Volume}$$

$$= \rho g A(z_2 - z_1)$$

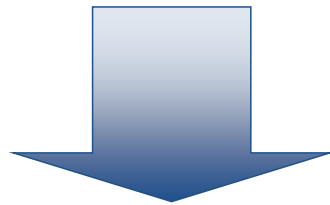
تغییرات فشار در راستای قائم برای سیال تحت اثر ثقل

چون سیال ساکن است، نیروی برشی وجود ندارد و نیرویی از طرف سیال اطراف در جهت قائم به المان وارد نمی‌شود.



$$p_1 \times A - p_2 \times A - \rho g A(z_2 - z_1) = 0$$

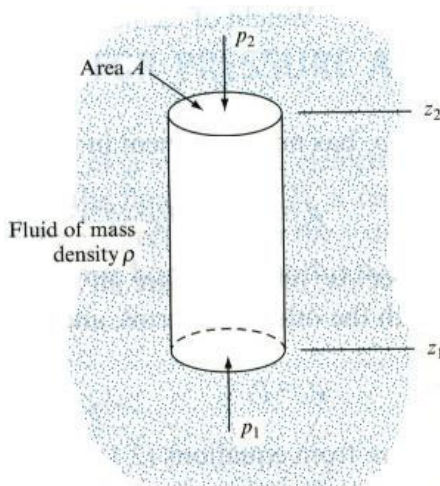
$$p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1)$$



در هر سیال تحت اثر ثقل، با افزایش ارتفاع، فشار کاهش می‌یابد.

مثال

غواصی از سطح دریا تا عمق ۳۰ متری پائین می‌رود. با فرض آن که چگالی آب دریا برابر با 1025 kg/m^3 باشد، حداکثر فشار در محیط کار این غواص چقدر است؟



$$p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1)$$

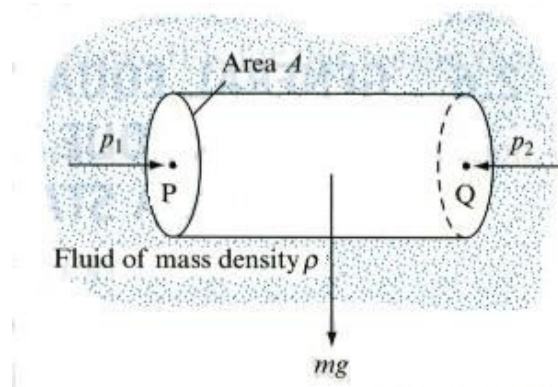
$$\begin{cases} z_2 = 0 \\ p_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = -30 \text{ m} \\ p_1 = ? \end{cases}$$

$$0 - p_1 = -1025 \times 9.81 (0 - (-30))$$

$$p_1 = 301.7 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

تساوی فشار در نقاط هم‌تراز از یک مایع در حالت استاتیک

- نقاط P و Q را که هم‌تراز هستند، داخل سیالی که در حالت استاتیک است، در نظر می‌گیریم.
- المان منشوری با سطح مقطع ثابت A را که در حال تعادل است، در نظر می‌گیریم.



- از تعادل نیروی‌ها در جهت افقی داریم: (چون سیال در حالت استاتیک است، نیروی برشی مماس بر المان نداریم)

$$P_1 A = P_2 A$$

$$P_1 = P_2$$

تساوی فشار در نقاط هم‌تراز از یک مایع در حالت استاتیک

در حالت استاتیک، فشار در هر دو نقطه هم‌تراز که در یک سیال قرار دارند، یکسان است.

- به بیان ریاضی، اگر صفحه افقی را صفحه (x,y) بگیریم:

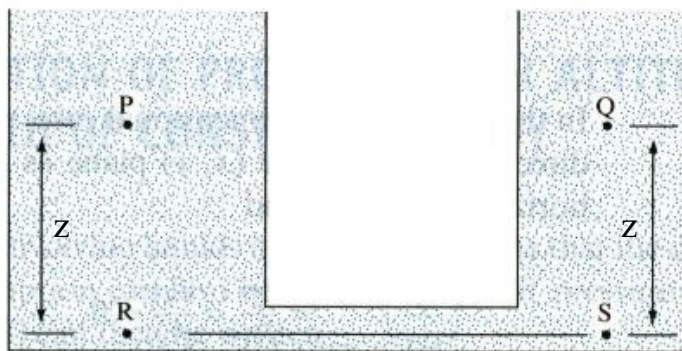
$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

دلیل استفاده از مشتق جزئی آن است که فشار می‌تواند در هر سه جهت تغییر کند.

تساوی فشار در نقاط هم‌تراز از یک مایع در حالت استاتیک

- حتی اگر نقاط P و Q که در یک سیال و در تراز یکسان قرار گرفته‌اند را بصورت یک المان افقی مستقیم نتوان به هم متصل نمود، باز هم فشار در این دو نقطه با هم برابر است.
- شرط ضروری قرار داشتن دو نقطه در یک سیال یکسان و محیط پیوسته و قرار داشتن در تراز یکسان است.
- اثبات: دو مخزن را که با لوله افقی به هم متصل شده‌اند در نظر می‌گیریم:



$$p_R = p_S$$

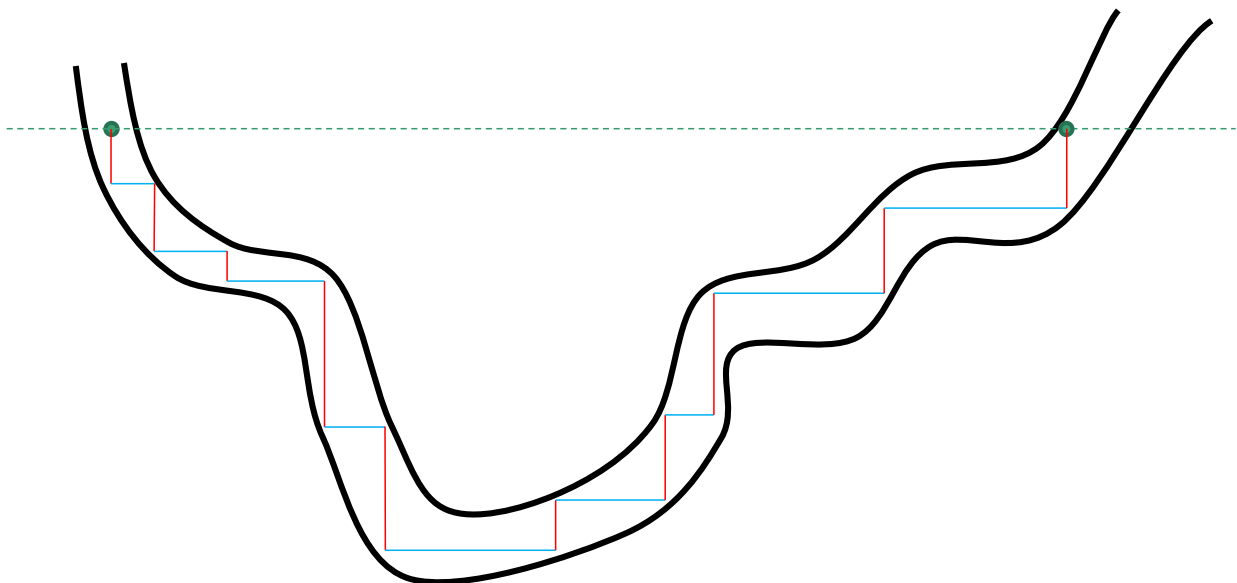
$$p_R = p_P + \rho g z$$

$$p_S = p_Q + \rho g z$$

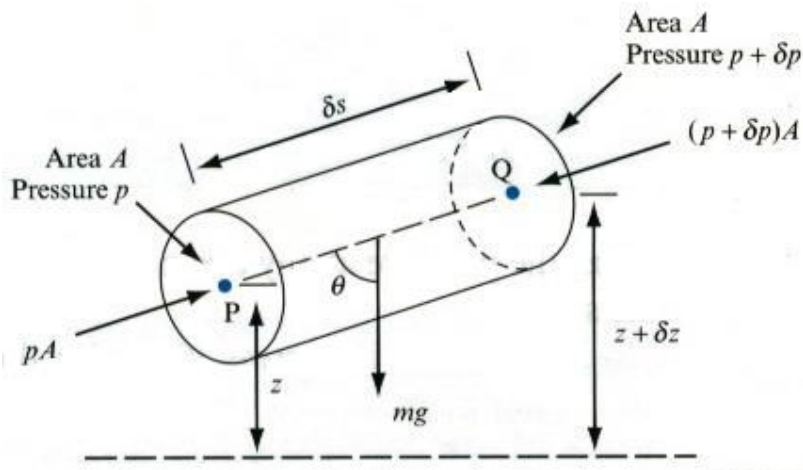
$$p_P + \rho g z = p_Q + \rho g z$$

$$p_P = p_Q$$

تساوی فشار در نقاط هم‌تراز از یک مایع در حالت استاتیک



رابطه عمومی تغییرات فشار بدلیل ثقل بین دو نقطه از سیال استاتیک



$$W = mg = \overbrace{\rho V}^m g$$

$$= \rho \times \underbrace{A \times \delta s}_V \times g$$

توجه: برای سیال استاتیک نیروی برشی در امتداد المان صفر است اما نیروی عمود بر المان صفر نیست و باید منظور گردد.

برای المان در حال تعادل، تعادل نیروها در هر امتدادی برقرار است. برای امتداد در

راستای المان داریم:

$$pA - (p + \delta p)A - \rho g A \delta s \cos \theta = 0$$

$$\delta p = -\rho g \delta s \cos \theta$$



$$\boxed{\frac{dp}{ds} = -\rho g \cos \theta}$$

رابطه عمومی تغییرات فشار بدلیل ثقل بین دو نقطه از سیال استاتیک

● در حالت عمومی سه بعدی، برداری است که در هر سه جهت x ، y و z مولفه دارد.

● اگر راستای المان را در صفحه افقی (x, y) در نظر بگیریم:

$$\frac{dp}{ds} = -\rho g \cos \theta \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{dp}{ds} \right)_{\theta=90^\circ} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

(تایید رابطه قبل در مورد تساوی فشار برای نقاط روی یک صفحه افقی)

(علت افقی بودن سطح آزاد مایعات)

● اگر راستای المان را در جهت قائم z در نظر بگیریم:

$$\frac{dp}{ds} = -\rho g \cos \theta \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{dp}{ds} \right)_{\theta=0^\circ} = \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

(تایید رابطه قبل در مورد تغییرات فشار تحت اثر ثقل در راستای قائم)

رابطه عمومی تغییرات فشار بدلیل ثقل بین دو نقطه از سیال استاتیک

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dp}{ds} \right)_{\theta=90^\circ} &= \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \left(\frac{dp}{ds} \right)_{\theta=0^\circ} &= \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g}$$

ρg روی صفحات افقی باید ثابت باشد.

برای برقراری تعادل باید ρ روی هر صفحه افقی ثابت باشد.

رابطه عمومی تغییرات فشار بدلیل ثقل بین دو نقطه از سیال استاتیک

شرایط تعادل تحت اثر ثقل :

- ✱ فشار در تمام نقاط روی یک سطح افقی باید یکسان باشد.
- ✱ چگالی در تمام نقاط روی یک سطح افقی باید یکسان باشد.
- ✱ تغییرات فشار بر حسب ارتفاع بصورت $dp/dz = -\rho g$ است.

● تغییرات واقعی فشار بر حسب ارتفاع با انتگرال گیری رابطه $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ بدست می آید:

$$p = -\int \rho g dz \qquad p_2 - p_1 = -\int_{z_1}^{z_2} \rho g dz$$

تغییرات فشار در سیال با چگالی ثابت بر حسب ارتفاع

برای اکثر مسائل مربوط به مایعات و برای گازها در صورتیکه اختلاف فشار کم باشد، می توان چگالی را ثابت فرض نمود.

$$p = -\rho g \int dz = -\rho g z + \text{constant}$$

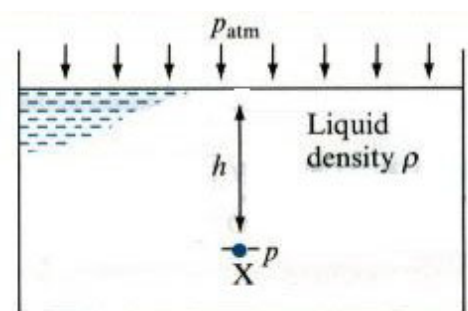
$$p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1)$$

فشار و ارتفاع معادل فشار

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Assuming constant density of fluid

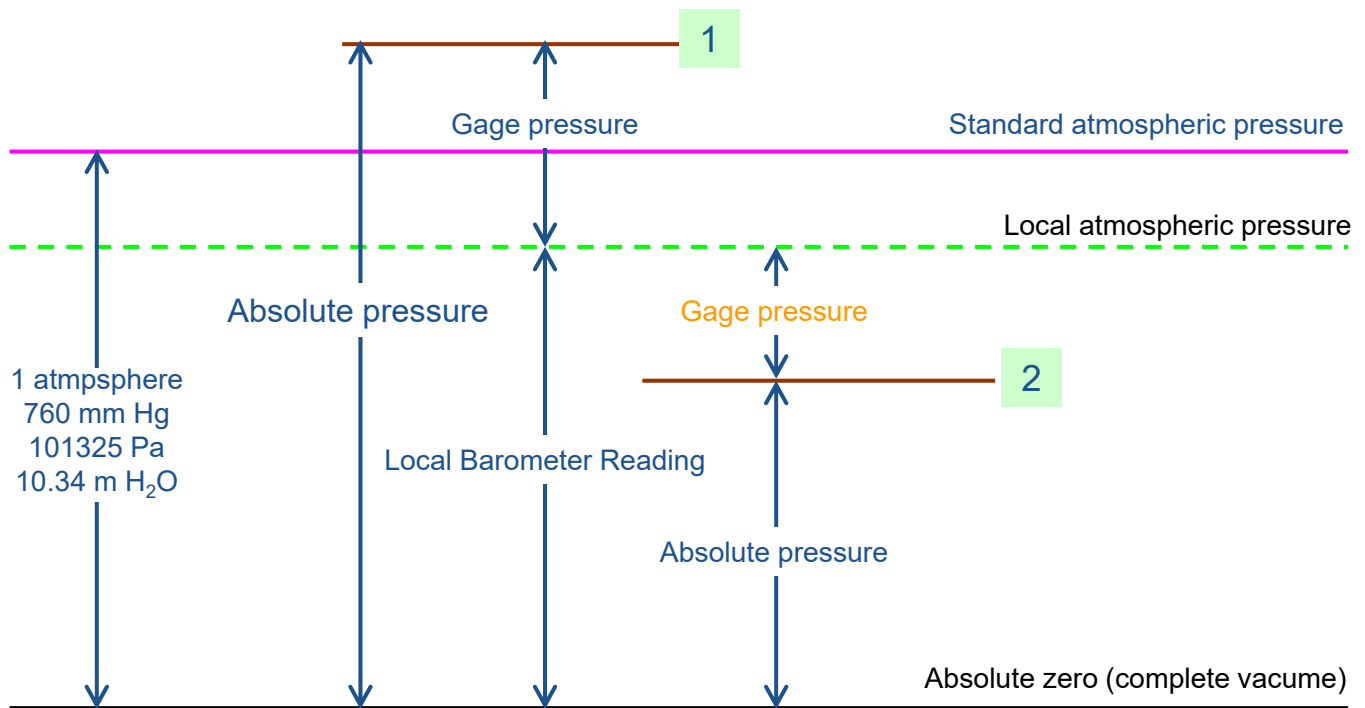
$$p = -\rho g z + \text{constant}$$



$$p = \rho g h + \text{constant}$$

$$p = \rho g h + p_{atm}$$

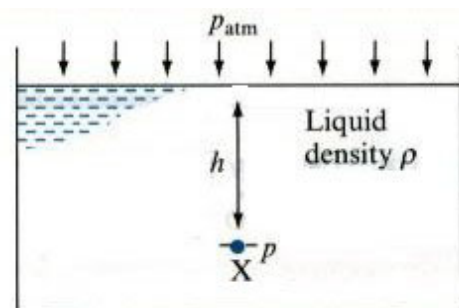
فشار مطلق و فشار نسبی



فشار و ارتفاع معادل فشار

فشار اتمسفر + فشار نسبی = فشار مطلق

$$p = \rho g h + p_{atm}$$



$$p = \rho g h$$

اگر فشار اتمسفر را برابر با صفر فرض کنیم:

اگر g ثابت فرض شود، برای هر نقطه مثل x ، فشار نسبی را می توان بصورت ارتفاع قائم h از ستون مایع مشخص با دانسیته ρ نوشت.

h را ارتفاع معادل فشار (head) برای مایع با دانسیته ρ می گویند.

مثال

مایعی در یک سیلندر با فشار نسبی 350 kPa قرار دارد. این مقدار فشار بر حسب ارتفاع معادل آب و جیوه (دانشیه نسبی 13.6) چقدر است؟
اگر فشار هوا 101.3 kPa باشد، فشار مطلق را بر حسب ارتفاع معادل فشار مایعات فوق حساب کنید.

$$h = \frac{p}{\rho g} \quad \rho_{H_2O} = 1000 \frac{kg}{m^3}$$

$$\text{equivalent head of water} = \frac{350 \times 10^3}{1000 \times 9.81} = 35.68 m$$

$$\rho_{Hg} = \sigma \times \rho_{H_2O} = 13.6 \times 1000 \frac{kg}{m^3} \quad \text{equivalent head of mercury} = \frac{350 \times 10^3}{1000 \times 13.6 \times 9.81} = 2.62 m$$

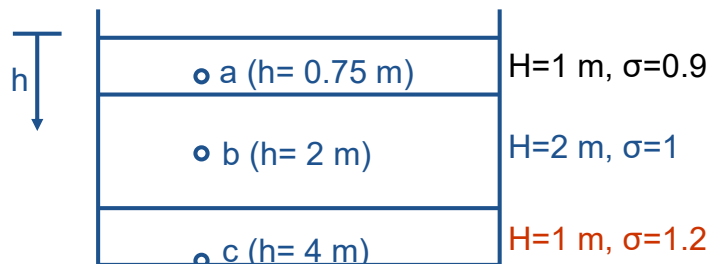
$$p_{absolute} = p_{gage} + p_{atm} = 350 + 101.3 = 451.3 \text{ kPa}$$

$$h_{H_2O} = \frac{451.3 \times 10^3}{1000 \times 9.81} = 46 m$$

$$h_{Hg} = \frac{451.3 \times 10^3}{1000 \times 13.6 \times 9.81} = 3.38 m$$

مثال

در ظرفی مطابق شکل سه مایع با ارتفاع‌های مشخص شده وجود دارند، فشار در نقاط a، b و c چقدر است؟ فشار معادل الکل با $\rho = 789 \text{ kg/m}^3$ در این سه نقطه چقدر است؟



$$p = \rho g h$$

$$p_a = (0.9 \times 1000) \times 9.81 \times 0.75 = 6.62 \text{ kPa}$$

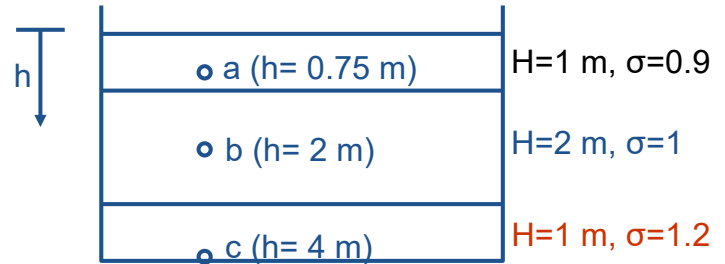
$$p_b = (0.9 \times 1000) \times 9.81 \times 1 + 1000 \times 9.81 \times 1 = 18.64 \text{ kPa}$$

$$\begin{aligned} p_c &= \sigma_1 \rho_w g H_1 + \sigma_2 \rho_w g H_2 + \sigma_3 \rho_w g H_3 = (\sigma_1 H_1 + \sigma_2 H_2 + \sigma_3 H_3) \rho_w g \\ &= [(0.9 \times 1) + (1 \times 2) + (1 \times 1.2)] 9.81 \times 1000 \\ &= 40.22 \text{ kPa} \end{aligned}$$

$$h_{alcohol,a} = \frac{6.62 \times 10^3}{789 \times 9.81} = 0.855 \text{ m}$$

$$h_{alcohol,b} = \frac{18.64 \times 10^3}{789 \times 9.81} = 2.41 \text{ m}$$

$$h_{alcohol,c} = \frac{40.22 \times 10^3}{789 \times 9.81} = 5.2 \text{ m}$$

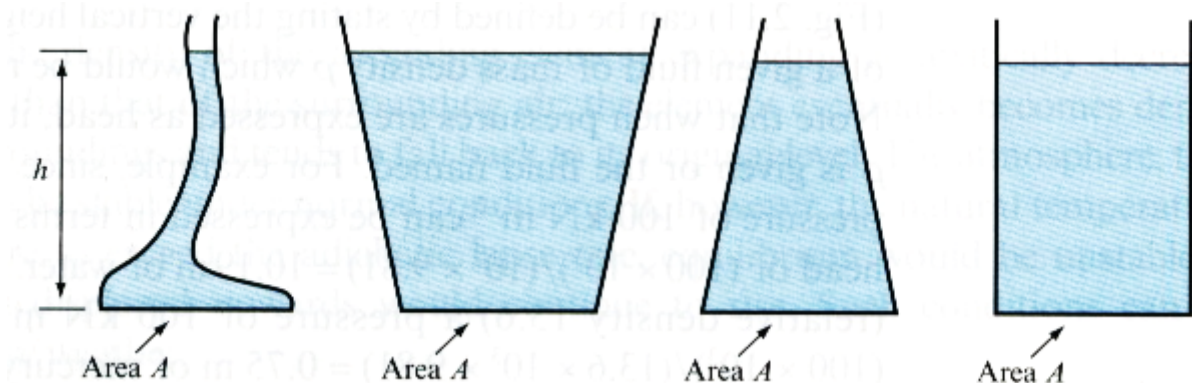


$$h_{alcohol,c} = \frac{p_c}{\sigma_{alcohol} \rho_w g} = \frac{(\sigma_1 H_1 + \sigma_2 H_2 + \sigma_3 H_3) \rho_w g}{\sigma_{alcohol} \rho_w g} = \frac{\sigma_1 H_1 + \sigma_2 H_2 + \sigma_3 H_3}{\sigma_{alcohol}}$$

$$= \frac{0.9 \times 1 + 1 \times 2 + 1.2 \times 1}{789/1000}$$

$$= 5.2 \text{ m}$$

The Hydrostatic Paradox



pressure on bottom in each case, $p = \rho g h$

Force on bottom = pressure $\times$ Area = $pA = \rho g h A$