

مکانیک سیالات

اصول تشابه و مدل‌های فیزیکی

www.hadian.ir



محمدرضا هادیان
دانشگاه یزد - دانشکده مهندسی عمران

Similarity

- در پدیده‌های سیال، بدلیل پیچیدگی زیادی که وجود دارد، در بسیاری از موارد استفاده از نتایج مدل‌های فیزیکی اجتناب‌ناپذیر است.
- در طراحی سازه‌های بزرگ و سازه‌هایی که جریان دارای الگوی پیچیده‌ای می‌باشد، استفاده از نتایج مدل‌های فیزیکی در مرحله نهایی طراحی الزامی است.
- با توجه به آنکه در بسیاری موارد اندازه سازه‌هایی که باید ساخته شوند، بسیار بزرگ‌تر از ابعاد قابل ساخت در آزمایشگاه هستند، باید نمونه‌های آزمایشگاهی با ابعاد کوچکتری ساخته شود.
- برای بدست آوردن اطلاعات دقیق از یک مطالعه مدل فیزیکی، باید تشابه از جنبه‌های مختلف بین مدل (model) و نمونه اصلی (prototype) برقرار باشد.

Similarity

● انواع مختلف تشابه:

☀ تشابه هندسی: نسبت کلیه ابعاد در مدل فیزیکی به نمونه اصلی باید برابر باشد و کلیه قسمت‌ها به نسبت معینی کوچک شده باشند.

▣ در برخی موارد نمی‌توان این تشابه را در همه جهت‌ها برقرار نمود. مثل ارتفاع زبری بستر در رودخانه.

☀ تشابه دینامیکی: نسبت بین نیروهای مختلف در نمونه اصلی و مدل یکسان باشد.

▣ در صورت برقراری این تشابه، الگوی جریان در نمونه اصلی و مدل یکسان خواهد بود.

▣ توجه شود که اعداد بی‌بعدی که تعریف شد، همان نسبت نیروها بودند. بنابراین تشابه دینامیکی مستلزم یکسان بودن اعداد بی‌بعد در مدل و نمونه اصلی است.

Similarity

● غالباً تأمین برابری نسبت همه نیروها بسیار سخت است و در اغلب موارد منجر به نسبت 1:1 می‌شود.

● در پاره‌ای از موارد پدیده فیزیکی به مقدار مطلق پارامترها بستگی دارد و نمی‌توان مدل را با مقیاس مشخصی کوچک نمود. مثل سرعت بالارفتن حباب‌های هوا در پدیده هوادهی سرریزها. در این موارد مشکل خطاهای مقیاسی (scale effects) مطرح می‌شود.

● معمولاً در حالتی که جریان بصورت سطح آزاد نبوده و سرعت هم خیلی زیاد نباشد، می‌توان از برابری فرود و ماخ صرف‌نظر کرد و عدد رینولدز مدل و نمونه اصلی را برابر قرار داد.

Similarity

● مثال: یک زیردریایی قرار است موشکی به قطر 2m و طول 10m را از زیر آب پرتاب کند که سرعت اولیه آن حدود 10 m/s است. اگر برای تست، از تونل آب با مقیاس 1:20 استفاده شود، سرعت آب در تونل را محاسبه کنید.

$$\text{Re}_m = \text{Re}_p \quad \left(\frac{\rho v L}{\mu} \right)_m = \left(\frac{\rho v L}{\mu} \right)_p$$

$$v_m = v_p \frac{L_p}{L_m} \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{\mu_m}{\mu_p} \quad \text{چون سیال در مدل و نمونه اصلی یکسان و آب است.}$$

$\underbrace{\frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{\mu_m}{\mu_p}}_{=1}$

$$v_m = v_p \frac{L_p}{L_m} = 10 \times 20 = 200 \text{ m/s}$$

ملاحظه می‌گردد که سرعت خیلی زیاد است و عملاً تأمین آن ممکن نیست.

Similarity

● مثال: برای مدل سازی یک کشتی فضائی به قطر 6m و طول 30m در یک تونل باد از مدل با مقیاس 1:30 استفاده شده است. اگر حداکثر سرعت کشتی 3m/s باشد، سرعت جریان در مدل چقدر باید باشد.

$$\text{Re}_m = \text{Re}_p \quad v_m = v_p \frac{L_p}{L_m} \frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{\mu_m}{\mu_p}$$

$\underbrace{\frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{\mu_m}{\mu_p}}_{=1}$

$$v_m = v_p \frac{L_p}{L_m} = 3 \times 30 = 90 \text{ m/s}$$

$$\text{Ma}_p = \frac{3}{340} \cong 0.01$$

$$\text{Ma}_m = \frac{90}{340} = 0.3$$

در این مثال هم سرعت خیلی زیاد بدست آمد و هم تأثیر عدد ماخ مطرح شده است.

Similarity

● از آنجا که تأمین مدل با عدد رینولدز برابر با نمونه اصلی معمولاً خیلی مشکل است، ۲ راه حل پیشنهاد شده است:

✱ در غالب موارد برای عدد رینولدز بالاتر از یک حد مشخص، رفتار و الگوی جریان عوض نمی‌شود و لذا می‌توان مدل را با عدد رینولدزی بالاتر از حد تعیین شده ساخت. البته این مقدار حدی به مسئله بستگی دارد.

✱ از سیالی با جنس دیگر استفاده نمود. مثل استفاده از هوای فشرده در مطالعات توربین‌های برق‌آبی.

Similarity

● مطالعات مدل در جریان‌های با سطح آزاد:

● در جریان‌های با سطح آزاد اثر وزن مهم است و لذا عدد فرود اهمیت دارد.

$$\text{Fr}_m = \text{Fr}_p \quad \left(\frac{v}{\sqrt{g L}} \right)_m = \left(\frac{v}{\sqrt{g L}} \right)_p \quad v_m = v_p \sqrt{\frac{L_m}{L_p}}$$

● اگر: $\frac{L_m}{L_p} = \lambda$  $v_m = v_p \sqrt{\lambda}$

● بنابراین در یک مدل بر پایه یکسان بودن عدد فرود، نسبت سرعت در مدل به نمونه اصلی، به اندازه جذر مقیاس هندسی مدل است.

Similarity

$$v = \frac{L}{t}$$

$$\frac{v_m}{v_p} = \frac{L_m}{L_p} \frac{t_p}{t_m}$$

$$\sqrt{\lambda} = \lambda \frac{t_p}{t_m}$$

$$t_m = t_p \sqrt{\lambda}$$

$$\frac{A_m}{A_p} = \left(\frac{L_m}{L_p} \right)^2$$

$$A_m = A_p \lambda^2$$

$$V_m = V_p \lambda^3$$

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{v_m}{v_p} \frac{A_m}{A_p} = \sqrt{\lambda} \lambda^2$$

$$Q_m = Q_p \lambda^{2.5}$$

Similarity

● مثال: برای مدل سازی جریان در خروجی نیروگاه از مدل با مقیاس 1:50 استفاده شده است. اگر دبی طراحی $1200 \text{ m}^3/\text{s}$ باشد، دبی مدل چقدر است؟

$$Q_m = Q_p \lambda^{2.5} = 1200 \times \left(\frac{1}{50} \right)^{2.5} = 0.067 \text{ m}^3/\text{s}$$

● باید دقت کرد که با توجه به ابعاد بزرگ سازه‌های آبی، معمولاً از مقیاس‌های ریز استفاده می‌شود و لذا می‌تواند گاهی منجر به اعداد رینولدز پائین شود که این موضوع باید در طراحی مدل مد نظر قرار گیرد.

● از طرفی چون نمی‌توان از هوا استفاده نمود، استفاده از سیال دیگر که در مدل‌های رینولدزی استفاده می‌شد، مشکلی را حل نمی‌کند.

Similarity

● مثال: برای مدل سازی جریان در کانالی با دبی $5 \text{ m}^3/\text{s}$ و سطح مقطع 4 m^2 که عمق هیدروليکی برابر با 0.67 دارد، کوچکترین اندازه مدل را که عدد رینولدز 2000 داشته باشد، تعیین کنید. دبی جریان و سطح مقطع در این حالت چقدر است. ($v=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$)

$$\text{Re}_m = 2000 \quad 2000 = \frac{v_m D_m}{10^{-6}} \quad v_m D_m = 0.002$$

$$\text{Fr}_m = \text{Fr}_p \quad \left(\frac{v}{\sqrt{gD}} \right)_m = \left(\frac{v}{\sqrt{gD}} \right)_p \quad \frac{v_m^2}{D_m} = \frac{v_p^2}{D_p} = \frac{(5/4)^2}{0.67}$$

$$D_m = \sqrt[3]{\frac{0.67 \times 0.002^2}{(5/4)^2}} = 0.018 \text{ m} \quad \lambda = \frac{0.018}{0.67} = \frac{1}{36.9} \cong \frac{1}{35}$$

Similarity

$$D_m = D_p \lambda = 0.67 \times \frac{1}{35} = 0.019 \text{ m}$$

$$Q_m = Q_p \lambda^{2.5} = 5 \times \left(\frac{1}{35} \right)^{2.5} = 6.9 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 0.69 \text{ lit/s}$$