

مکانیک سیالات

تحلیل ابعادی

www.hadian.ir



محمد رضا هادیان
دانشگاه یزد - دانشکده مهندسی عمران

تحلیل ابعادی

- تحلیل ابعادی، تکنیک مفیدی است که در همه شاخه‌های مهندسی کاربرد دارد.
- اگر فاکتورهای موثر در یک مسئله مشخص باشد، تحلیل ابعادی معمولاً می‌تواند فرم رابطه بین آنها را مشخص کند.
- تحلیل ابعادی مانند روش جبری دقیق نیست و جواب دقیقی بدست نمی‌دهد. این روش تنها شکل رابطه را مشخص می‌نماید.

تحلیل ابعادی

یکی از مسائل مهم در تحلیل ابعادی، بعد متغیرها است. رابطه‌ای که از تحلیل ابعادی بدست می‌آید باید طرفین آن دارای ابعاد یکسان باشد.

توجه شود که واحدهای مختلفی برای اندازه‌گیری کمیت‌ها وجود دارند، ولی از نظر ابعاد همه آنها یکسان هستند. در تحلیل ابعادی، واحد بکار رفته برای پارامترها مهم نیست و تنها در ضریبی که در روابط وجود دارند اثر می‌گذارد. این ضرائب از تحلیل ابعادی بدست نمی‌آیند.

در تحلیل ابعادی باید چند بعد را به عنوان ابعاد اصلی در نظر گرفت و سایر ابعاد را می‌توان با توجه به واحدهای اصلی نوشت.

تحلیل ابعادی

معمولاً جرم (M)، طول (L) و زمان (T) به عنوان واحدهای اصلی در نظر گرفته می‌شوند. (اما گاهی بجای جرم، از نیرو (F) استفاده می‌شود).

به عنوان مثال بعد نیرو بدین صورت است:

$$\begin{aligned}[F] &= [\text{mass}] \times [\text{acceleration}] \\ &= [M][LT^{-2}] = [MLT^{-2}]\end{aligned}$$

برای فشار:

$$\begin{aligned}[p] &= [\text{force}] / [\text{area}] \\ &= [MLT^{-2}] \times [L^{-2}] = [ML^{-1}T^{-2}]\end{aligned}$$

فهرستی از ابعاد پارامترها در جدول 8.6 کتاب داگلاس یا جدول 5.1 کتاب استریتز آمده است.

Buckingham II theorem

یکی از روش‌هایی که می‌تواند برای بدست آوردن فرم رابطه بکار رود، این است که هر یک از عوامل موثر را بصورت یک توان مجهول در نظر گرفت و ابعاد طرفین رابطه را برابر قرار داد. این روش فقط زمانی که تعداد عوامل خیلی کم باشد مناسب است و برای مواقعی که تعداد عوامل موثر زیاد می‌شود کارآیی ندارد.

تئوری π باکینگهام یک روش بسیار کارآ در برآورد شکل رابطه ریاضی برای مسئله مورد نظر است. این روش برای مسائل با تعداد زیاد عوامل درگیر نیز کارآیی دارد.

Buckingham II theorem

در روش π باکینگهام، اگر n پارامتر در مسئله دخیل باشند و m بعد در آنها وجود داشته باشد، $n-m$ گروه پارامتر بی‌بعد تشکیل داده می‌شود.

$$F(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0$$

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0$$

برای تشکیل گروه‌ها (π ها)، m پارامتر به عنوان پارامترهای تکراری انتخاب شده و در هر گروه، هر یک از این پارامترها به توان مجهول رسانده و در یکی از پارامترهای باقیمانده ضرب می‌شود.

پارامترهای انتخابی باید شامل تمام ابعاد موجود در مسئله باشد و ترجیحاً از پارامترهای مهم‌تر باشند.

Buckingham Π theorem

● به عنوان مثال اگر A_1 تا A_3 به عنوان پارامترهای تکراری انتخاب شوند:

$$\pi_1 = A_1^{x_1} A_2^{y_1} A_3^{z_1} A_4$$

$$\pi_2 = A_1^{x_2} A_2^{y_2} A_3^{z_2} A_5$$

$$\pi_{n-m} = A_1^{x_{n-m}} A_2^{y_{n-m}} A_3^{z_{n-m}} A_n$$

● در هر رابطه توان‌های مجهول بصورتی محاسبه می‌شوند که آن π بصورت بی‌بعد درآید.

● گاهی π هایی که در آن پارامترهای کم‌اهمیت قرار دارند، حذف می‌شود.

Buckingham Π theorem

● می‌تواند چند π را در هم ضرب یا برهم تقسیم کرد و جایگزین یکی از π ها نمود.

● می‌توان هر π را به هر توان معلومی رساند، در یک عدد ضرب یا بر یک عدد تقسیم نمود.

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m}) = 0$$

$$\Phi\left(\frac{\pi_1}{\pi_2}, \frac{1}{\pi_2}, (\pi_3)^i, \dots, k\pi_{n-m}\right) = 0$$

● اگر در بین پارامترهای موثر، اعداد بی‌بعدی وجود داشته باشند، خود آنها را می‌توان به عنوان یک π در نظر گرفت.

Buckingham Π theorem

● برخی اعداد بی بعد مهم:

● عدد رینولدز: نسبت نیروهای اینرسی به نیروهای لزجت

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{V d}{\nu}$$

● عدد فرود: نسبت نیروهای اینرسی به وزن

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g l}}$$

● عدد وبر: نسبت نیروهای اینرسی به کشش سطحی

$$We = \frac{\rho V^2 l}{\sigma}$$

● عدد ماخ: نسبت سرعت سیال به سرعت صوت در سیال یا نسبت

انرژی جنبشی جریان به انرژی داخلی سیال

$$Ma = \frac{V}{C} = \frac{V}{\sqrt{K/\rho}}$$

Buckingham Π theorem

● نیروی لازم برای حرکت جسم در داخل سیال (F) به سرعت جسم (v)، طول جسم (l)، جرم حجمی سیال (ρ)، ویسکوزیته سیال (μ) و شتاب جاذبه (g) بستگی دارد. فرم رابطه این نیرو را بر حسب پارامترهای موثر مشخص کنید.

$$F = \phi(v, l, \rho, \mu, g)$$

	F	v	l	ρ	μ	g
M	1	0	0	1	1	0
L	1	1	1	-3	-1	1
T	-2	-1	0	0	-1	-2

● ۶ عامل موثر و ۳ بعد وجود دارد: $n=6$, $m=3$

Buckingham Π theorem

● $n-m=3$ گروه بی بعد تشکیل می شود:

$$\pi_1 = v^{x_1} l^{y_1} \rho^{z_1} F$$

$$\pi_2 = v^{x_2} l^{y_2} \rho^{z_2} \mu$$

$$\pi_3 = v^{x_3} l^{y_3} \rho^{z_3} g$$

● با قرار دادن ابعاد پارامترها در اولین گروه بی بعد:

$$M^0 L^0 T^0 = L^{x_1} T^{-x_1} L^{y_1} M^{z_1} L^{-3z_1} M L T^{-2}$$

$$\begin{cases} M : z_1 + 1 = 0 \\ L : x_1 + y_1 - 3z_1 + 1 = 0 \\ T : -x_1 - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -2 \\ z_1 = -1 \end{cases} \quad \pi_1 = \frac{F}{v^2 l^2 \rho}$$

Buckingham Π theorem

$$\pi_1 = \frac{F}{v^2 l^2 \rho} \quad \pi_1 = \frac{F}{0.5 v^2 l^2 \rho}$$

$$\pi_2 : \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -1 \\ z_2 = -1 \end{cases} \quad \pi_2 = \frac{\mu}{\rho v l} \quad \pi_2 = \frac{\rho v l}{\mu} = \text{Re}$$

$$\pi_3 : \begin{cases} x_3 = -2 \\ y_3 = 1 \\ z_3 = 0 \end{cases} \quad \pi_3 = \frac{g l}{v^2} \quad \pi_3 = \frac{v}{\sqrt{g l}} = \text{Fr}$$

$$\Theta\left(\frac{F}{0.5 v^2 l^2 \rho}, \text{Re}, \text{Fr}\right) = 0$$

$$\frac{F}{0.5 v^2 l^2 \rho} = \Phi(\text{Re}, \text{Fr})$$

Buckingham Π theorem

● تنش وارد بر جدار لوله تابع سرعت جریان، سرعت حرکت لوله، قطر لوله، زبری لوله، لزجت و جرم حجمی سیال است. فرم رابطه تنش را بر حسب عوامل موثر تعیین کنید.

$$\Theta(\tau_0, v, d, \varepsilon, \rho, \mu, v_s) = 0$$

	τ_0	v	d	ε	ρ	μ	v_s
M	1	0	0	0	1	1	0
L	1	1	1	1	-3	-1	1
T	-2	-1	0	0	0	-1	-1

● ۷ عامل موثر و ۳ بعد وجود دارد: $n=7$, $m=3$

Buckingham Π theorem

● $n-m=4$ گروه بی بعد تشکیل می شود:

$$\pi_1 = \rho^{x_1} v^{y_1} d^{z_1} \tau_0$$

$$\pi_1 = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho v^2}$$

$$\pi_2 = \rho^{x_2} v^{y_2} d^{z_2} \varepsilon$$

$$\pi_2 = \frac{\varepsilon}{d}$$

$$\pi_3 = \rho^{x_3} v^{y_3} d^{z_3} \mu$$

$$\pi_3 = \frac{\mu}{\rho v d} = \frac{\rho v d}{\mu} = \text{Re}$$

$$\pi_4 = \rho^{x_4} v^{y_4} d^{z_4} v_s$$

$$\pi_4 = \frac{v_s}{v}$$

$$\Theta\left(\frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho v^2}, \frac{\varepsilon}{d}, \text{Re}, \frac{v_s}{v}\right) = 0$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \rho v^2 \Phi\left(\frac{\varepsilon}{d}, \text{Re}, \frac{v_s}{v}\right)$$