مکانیک سیالات

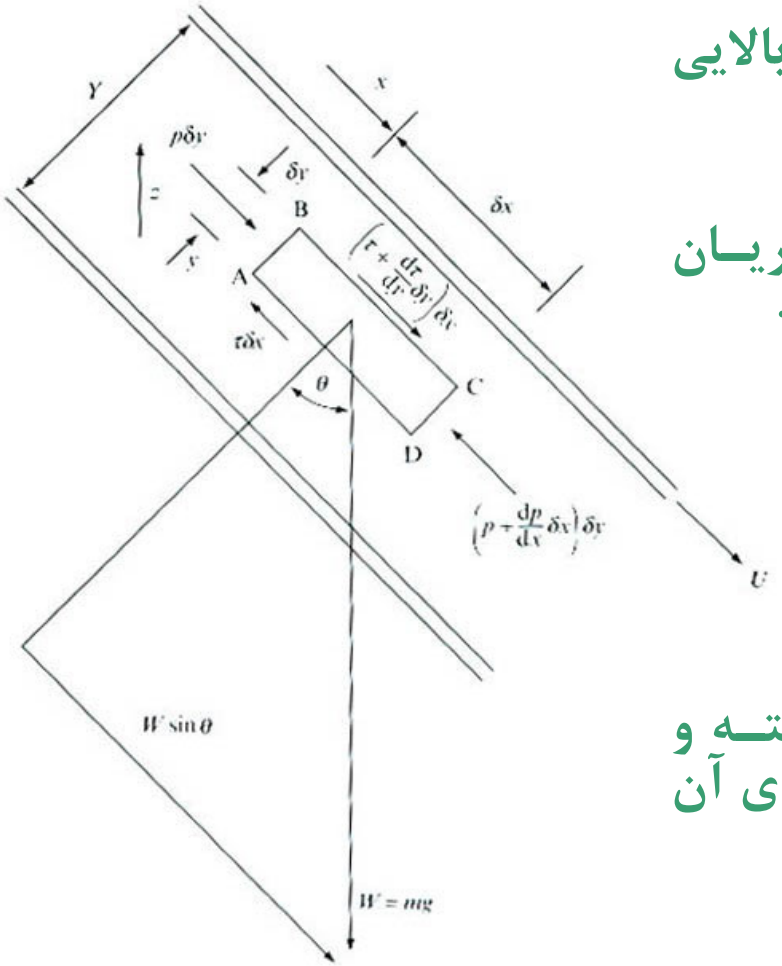
جریان سیال واقعی

جریان یکنواخت آرام و ماندگار سیال غیرقابل تراکم بین دو صفحه موازی و لوله

www.hadian.ir

محمدرضا هادیان
دانشگاه یزد – دانشکده مهندسی عمران

Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow Between Parallel Plates

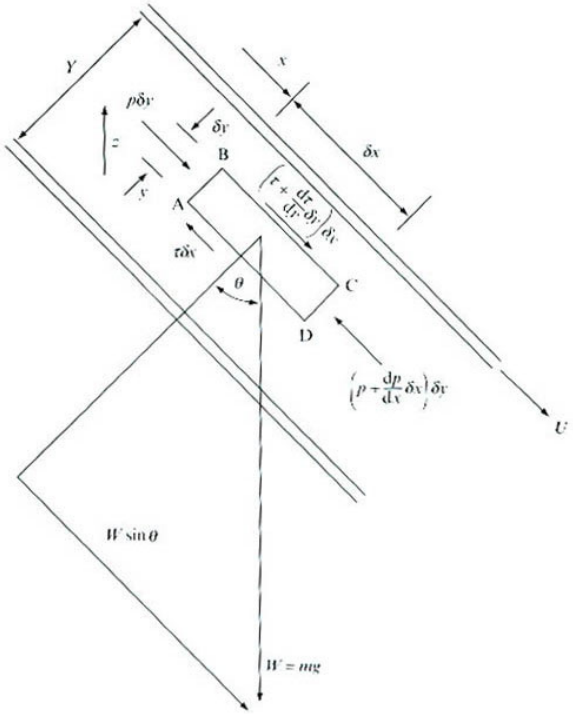


- صفحه پائینی ثابت و صفحه بالایی با سرعت U حرکت می‌کند.
- می‌خواهیم توزیع سرعت جریان بین دوصفحه را بدست آوریم.
- المان ABCD را در نظر گرفته و معادله ممنتوم را برای آن می‌نویسیم.

Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow Between Parallel Plates

Resultant force in flow direction =

Rate of change of momentum in flow direction



- چون جریان ماندگار و یکنواخت است، شتاب وارد بر سیال صفر است.

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}}_{=0} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$$

for steady flow — for uniform flow

- بنابراین برآیند نیروهای خارجی وارد بر المان صفر است.
- اگر صفحه‌ها به اندازه کافی بزرگ باشند که اثر لبه صفحات ناچیز باشد، برآیند نیروها عبارت است از:

$$p\delta y - \left(p + \frac{dp}{dx}\delta x\right)\delta y + W\sin\theta - \tau\delta x + \left(\tau + \frac{d\tau}{dy}\delta y\right)\delta x = 0$$

$$W = \rho g\, \delta x\, \delta y$$

Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow Between Parallel Plates

$$-\frac{dp}{dx}\delta x\delta y + W\sin\theta + \frac{d\tau}{dy}\delta y\delta x = 0$$

$$\sin\theta = -\frac{dz}{dx}$$

$$-\frac{dp}{dx}\delta x\delta y + \rho g\,\delta x\delta y\left(-\frac{dz}{dx}\right) + \frac{d\tau}{dy}\delta y\delta x = 0$$

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{d}{dx}\underbrace{\left(p + \rho g z\right)}_{p^*}$$

piezometric pressure

- با فرض آنکه $p+\rho gz$ تنها در جهت x تغییر کند:

$$\tau = \int \frac{dp^*}{dx}dy = y\frac{dp^*}{dx} + C_1$$

for laminal flow, $\tau = \mu\frac{du}{dy}$

Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow Between Parallel Plates

$$\frac{du}{dy}=\frac{y}{\mu}\frac{dp^*}{dx}+\frac{C_1}{\mu}$$

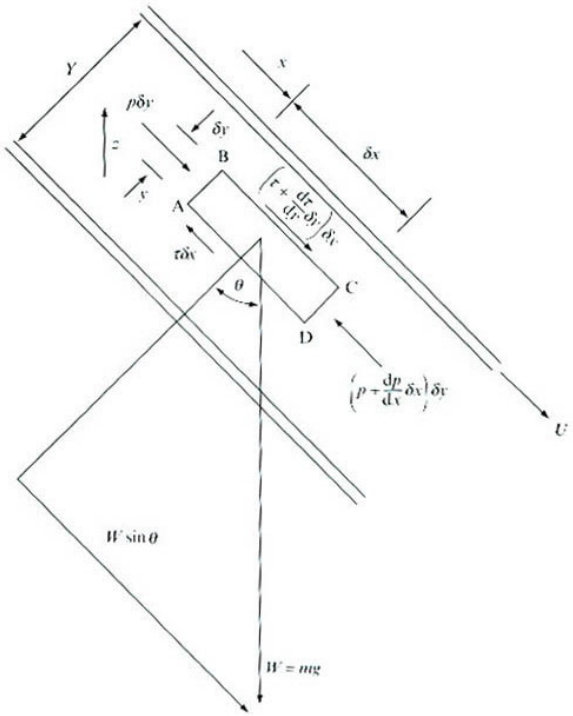
$$u=\frac{1}{\mu}\frac{dp^*}{dx}\frac{y^2}{2}+\frac{C_1}{\mu}y+C_2$$

on fixed plate, $(y=0,u=0)$ ⇒ $C_2=0$

on moving plate, $(y=Y,u=U)$

$$C_1=\mu\frac{U}{Y}-\frac{Y}{2}\frac{dp^*}{dx}$$

$$u=\frac{y}{Y}U-\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}(p+\rho gz)(Yy-y^2)$$



Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow Between Parallel Plates

- رابطه کلی برای جریان آرام ماندگار یکنواخت بین دوصفحه موازی:

$$u=\frac{y}{Y}U-\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}(p+\rho gz)(Yy-y^2)$$

- برای صفحات افقی ($\sin\theta=0$):

$$u=\frac{y}{Y}U-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(Yy-y^2)$$

  - می‌تواند بدون وجود گرادیان فشار، اما با حرکت یکی از صفحات، جریان سیال ایجاد شود. ($u=(y/Y)U$)

- برای صفحات افقی و ثابت ($U=0$, $\sin\theta=0$):

$$u=-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(Yy-y^2)$$

  - توزیع سرعت بین دوصفحه موازی افقی در حالت آرام بصورت سهموی است.
  - با توجه به علامت منفی، dp/dx باید منفی باشد. به عبارت دیگر فشار در جهت حرکت افت می کند.

Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow Between Parallel Plates

- برای محاسبه دبی عبوری بین دو صفحه، می‌توان دبی عبوری از المان در واحد عرض (δq) را نوشته و انتگرال‌گیری کرد.

$$\delta q = u\delta y$$

- برای حالت کلی:

$$q = \int_{y=0}^{Y} u dy = \int_{y=0}^{Y} \left(\frac{y}{Y}U - \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}(p+\rho gz)(Yy - y^2) \right) dy$$

$$= \left[\frac{U}{Y}\frac{y^2}{2} \right]_0^Y - \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}(p+\rho gz)\left[Y\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^Y$$

$$\boxed{q = \frac{UY}{2} - \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}(p+\rho gz)\frac{Y^3}{6}}$$

- برای صفحات افقی ثابت:

$$\boxed{q = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{Y^3}{6}}$$

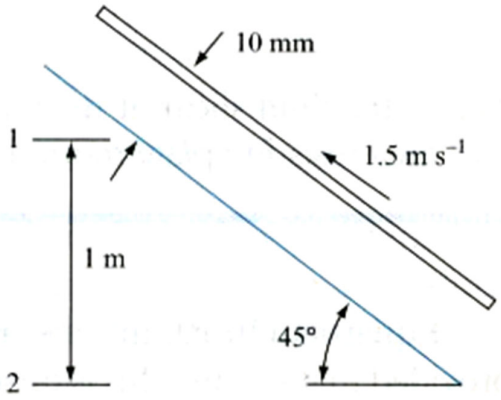
Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow Between Parallel Plates

- سیالی با ویسکوزیته μ=0.9 Ns/m^2 و دانسیته ρ=1260 kg/m^3 بین دو صفحه موازی با پهنای زیاد، بصورت آرام جریان دارد. فاصله دو صفحه 10 mm و زاویه آنها با افق 45° است و صفحه بالایی با سرعت 1.5 m/s نسبت به صفحه پائینی در خلاف جهت جریان حرکت داده می‌شود. فشار نسبی دردونقطه که فاصله قائم آنها 1 m است، برابر با 250 kpa و 80 kpa اندازه‌گیری شده است.

  - توزیع سرعت و تنش برشی را بین دوصفحه بدست آورید.
  - حداکثر سرعت سیال بین دو صفحه و تنش برشی روی صفحه بالایی چقد راست؟

$$\text{At (1)}: p_1^* = p_1 + \rho g z_1$$
$$= 250\times1000 + 9.81\times1260\times1.0$$
$$= 262.36\ \text{kpa}$$

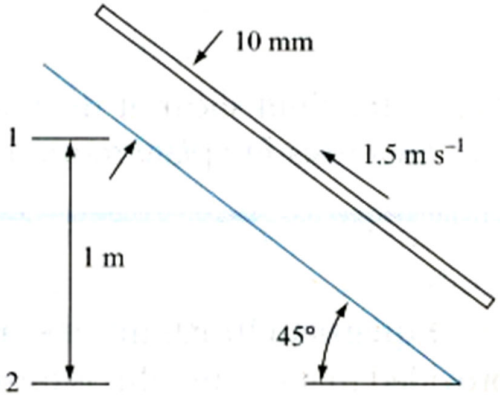
$$\text{At (2)}: p_2^* = p_2 + \rho g z_2$$
$$= 80\times1000 + 9.81\times1260\times0.0$$
$$= 80.0\ \text{kpa}$$



Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow Between Parallel Plates

$$\frac{dp^*}{dx} = \frac{80 - 262.36}{\sqrt{2}} = -\frac{182.36}{\sqrt{2}}$$

$$= -128.95 \frac{\text{kpa}}{\text{m}}$$



$$u = \frac{y}{Y}U - \frac{1}{2\mu}\frac{dp^*}{dx}\left(Yy - y^2\right)$$

$$= \frac{-1.5}{0.01}y - \frac{1}{2\times 0.9}\left(-128.95\times 1000\right)\left(0.01y - y^2\right)$$

$$= -150y + 716.4y - 71.64\times 1000\times y^2$$

$$\boxed{u = 566.4y - 71.64\times 1000\times y^2}$$

$$\tau_y = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)_y \qquad \frac{du}{dy} = 566.4 - 143.28\times 1000\times y$$

$$\boxed{\tau_y = 509.76 - 128.95\times 1000\times y}$$

Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow Between Parallel Plates

- حداکثر سرعت در محلی اتفاق می‌افتد که du/dy=0:

$$\frac{du}{dy} = 566.4 - 143.28\times 1000\times y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.395\times 10^{-2}\ \text{m}$$

$$u_{\max} = u_{y=0.00395} = 566.4\times 0.00395 - 71.64\times 1000\times 0.00395^2$$

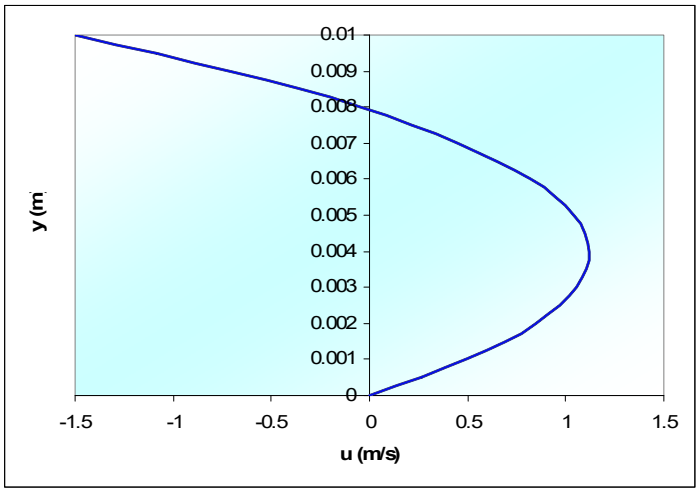
$$= 2.24 - 1.117 = 1.123 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

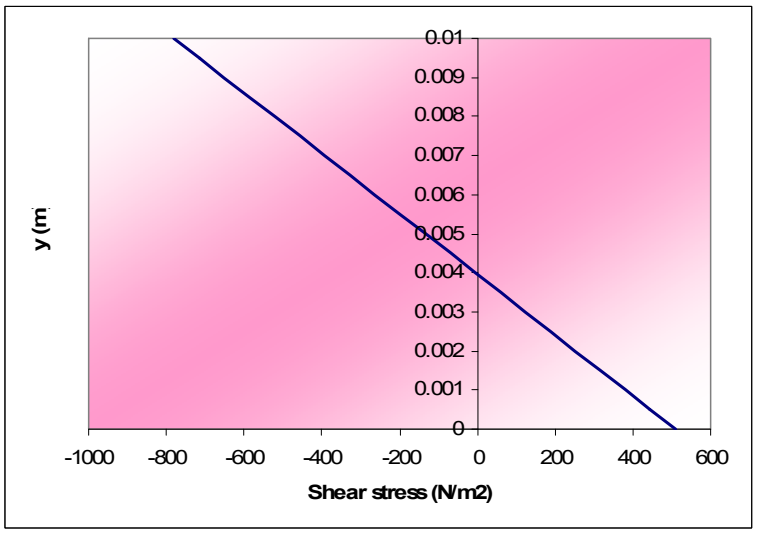
- تنش برشی روی صفحه بالایی:

$$\tau_Y = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)_Y = 509.76 - 128.95\times 1000\times 0.01$$

$$= 0.78 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

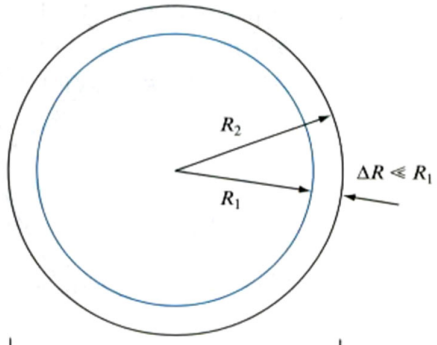
Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow Between Parallel Plates

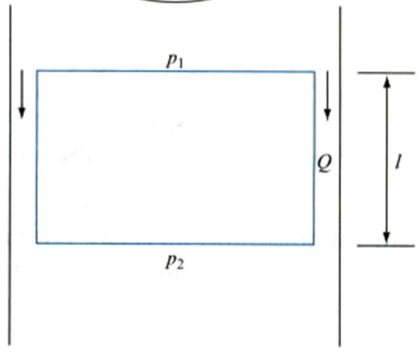




Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow Between Parallel Plates

- یکی از کاربردهای رابطه محاسبه دبی در جریان آرام بین دو صفحه موازی، محاسبه دبی جریان عبوری بین دو سیلندر است بطوریکه ضخامت حلقه بین آنها خیلی کوچکتر از ابعاد سیلندرها باشد.
- به عنوان مثال مقدار نشت دبی بین پیستون و بدنه سیلندر شکل زیر برابر است با:



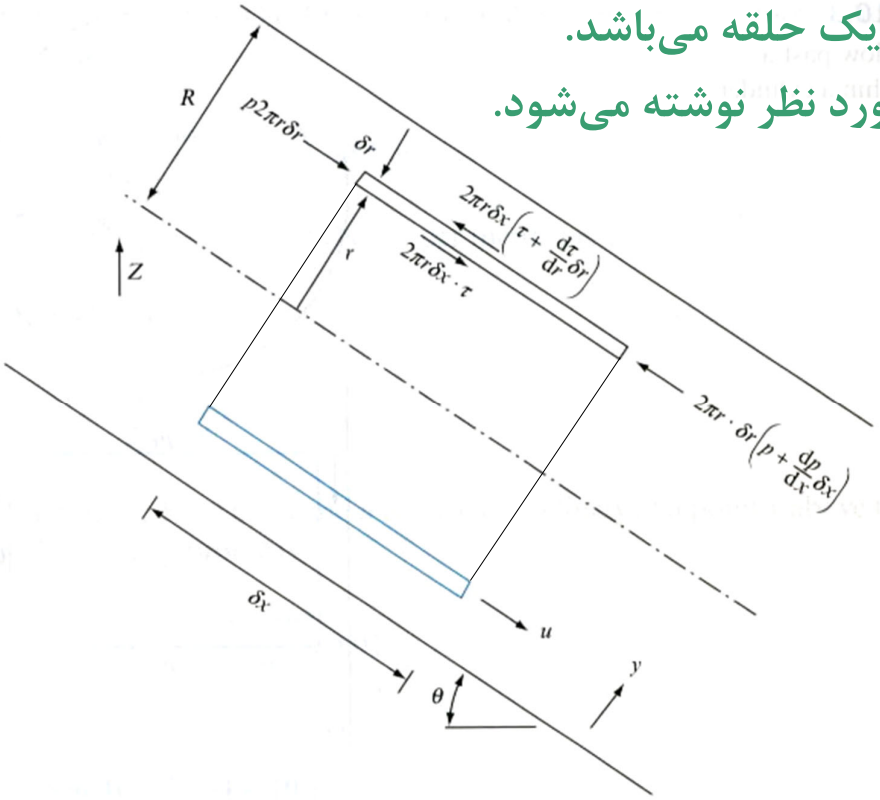


$$q = \frac{UY}{2} - \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}\left(p + \rho g z\right)\frac{Y^3}{6}$$

$$Q = \frac{1}{12\mu}\frac{p_1 - p_2}{l}\left(\Delta R\right)^3 2\pi R$$

Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow in Circular Cross-Section Pipes

- جریان یکنواخت ماندگار آرام را مشابه قسمت‌های قبل می‌توان برای یک مقطع دایره‌ای بدست آورد.
- المان مورد نظر دراین‌حالت یک حلقه می‌باشد.
- معادله ممنتوم برای المان مورد نظر نوشته می‌شود.



Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow in Circular Cross-Section Pipes

$$p2\pi r\,\delta r-\left(p+\frac{dp}{dx}\delta x\right)2\pi r\,\delta r+\tau 2\pi r\,\delta x$$

$$-\left[2\pi r\,\tau\delta x+\frac{d}{dr}\left(2\pi r\,\tau\delta x\right)\delta r\right]+W\sin\theta=0$$

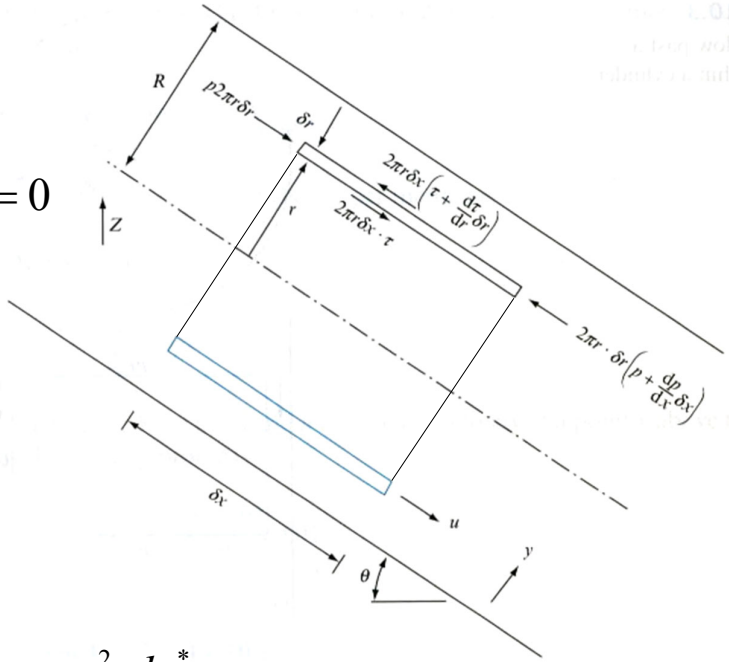
$$W=mg=2\pi r\,\delta r\,\delta x\rho g$$

$$\sin\theta=-\frac{dz}{dx}$$

$$-\frac{dp}{dx}-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau)-\rho g\frac{dz}{dx}=0$$

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\left(p+\rho gz\right)}_{p^*}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau)=0$$

piezometric pressure



$$\frac{r^2}{2}\frac{dp^*}{dx}+r\tau+C_1=0$$

for centerline, $r=0 \Rightarrow C_1=0$

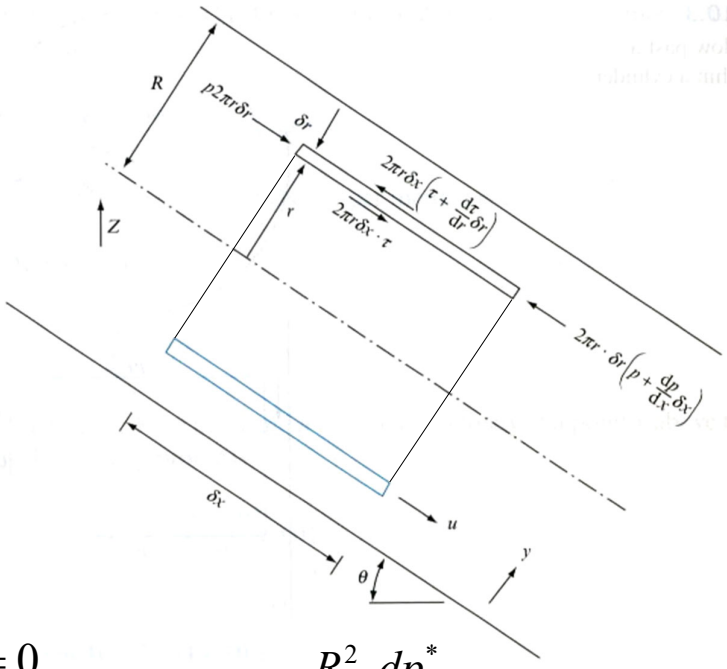
Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow in Circular Cross-Section Pipes

$$\tau = \mu\frac{du}{dy} = -\mu\frac{du}{dr}$$

$$\frac{r^2}{2}\frac{dp^*}{dx} - r\,\mu\frac{du}{dr} = 0$$

$$du = \frac{r}{2\mu}\frac{dp^*}{dx}dr$$

$$u = \frac{r^2}{4\mu}\frac{dp^*}{dx} + C_2$$

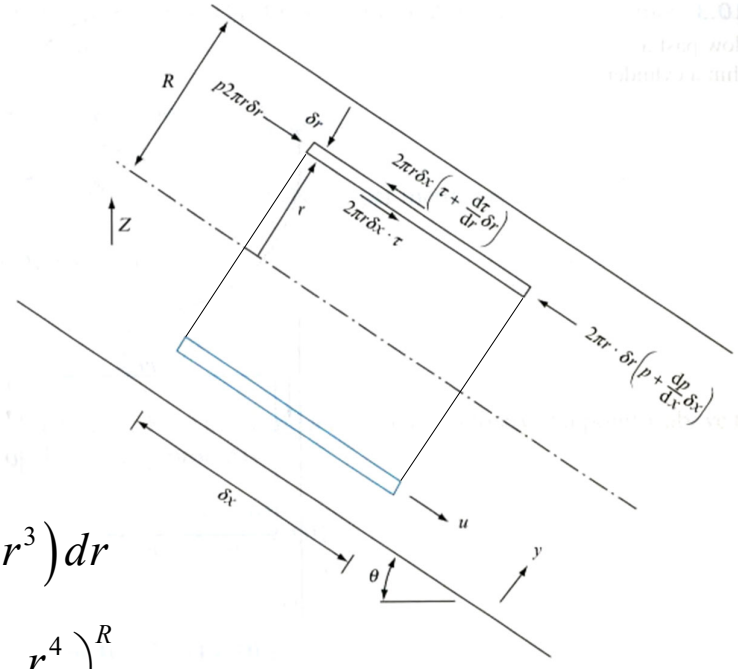


Boundary condition : $\begin{cases} r = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ r = R \Rightarrow u = 0 \end{cases}$ $\qquad C_2 = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp^*}{dx}$

$$\boxed{u = -\frac{R^2 - r^2}{4\mu}\frac{d}{dx}(p + \rho g z)}$$

Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow in Circular Cross-Section Pipes

$$u_{\max} = u_{r=0} = -\frac{R^2}{4\mu}\frac{dp^*}{dx}$$



$$\delta Q = u2\pi r\delta r$$

$$Q = \int_0^R u2\pi r dr = -\frac{\pi}{2\mu}\frac{dp^*}{dx}\int_0^R \left(R^2 r - r^3\right)dr$$

$$= -\frac{\pi}{2\mu}\frac{dp^*}{dx}\left(R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)_0^R$$

$$\boxed{Q = -\frac{\pi}{8\mu}\frac{d}{dx}(p + \rho g z)R^4}$$

Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow in Circular Cross-Section Pipes

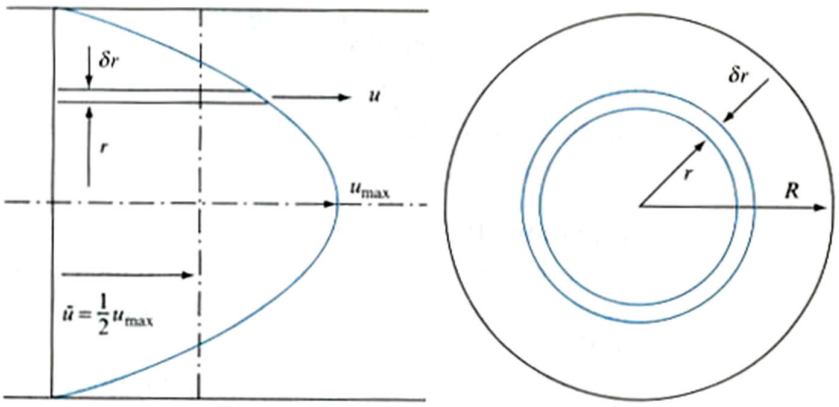
$$Q = -\frac{\pi}{8\mu}\frac{dp^*}{dx}R^4$$

دبی بر حسب افت فشار در طول l از لوله:

$$Q = -\frac{\Delta p \pi d^4}{128\mu l}$$

سرعت متوسط در لوله:

$$\bar{u} = -\frac{1}{8\mu}\frac{dp^*}{dx}R^2 = \frac{1}{2}u_{\max}$$



Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow in Circular Cross-Section Pipes

از رابطه دبی بر حسب افت فشار می‌توان فرمول Hagen-Poiseuille را برای افت فشار در لوله بدست آورد:

$$\Delta p = \frac{128\mu l Q}{\pi d^4}$$

یا بر حسب سرعت متوسط:

$$\Delta p = \frac{32\mu l \bar{u}}{d^2}$$

Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow in Circular Cross-Section Pipes

گلیسیرین با ویسکوزیته $0.9\ Ns/m^2$ و دانسیته $1260\ kg/m^3$ در طول یک خط لوله افقی به طول $6.5\ m$ و قطر $d=0.01\ m$ با دبی $Q=1.8\ lit/min$ پمپ می‌شود. عدد رینولدز را محاسبه کرده و مشخص کنید که نوع جریان را از نظر آشفته یا آرام بودن مشخص کنید. افت فشار ناشی از اصطکاک در لوله را بدست آورده و حداکثر دبی که جریان به صورت آرام در لوله جریان داشته باشد را محاسبه کنید.

$$\text{mean velocity, } \bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{1.8/60}{\pi d^2/4} \times 10^{-3} = 0.382\ \frac{m}{s}$$

$$Re = \frac{\rho u d}{\mu} = \frac{1260 \times 0.382 \times 0.01}{0.9} = 5.35 < 2000 \Rightarrow \text{Laminar flow}$$

$$\Delta p = \frac{128 \mu l Q}{\pi d^4} = \frac{128 \times 0.9 \times 6.5 \times \left(\frac{1.8 \times 10^{-3}}{60} \right)}{\pi \times 0.01^4} = 715 \times 10^3\ pa$$

Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow in Circular Cross-Section Pipes

$$Re = \frac{\rho \bar{u} d}{\mu} = \frac{\rho \frac{Q}{A} d}{\mu} = \frac{\rho Q d}{\mu \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \rho Q}{\mu \pi d}$$

$$\frac{Re}{Re_{crit}} = \frac{Q}{Q_{crit}} \qquad Q_{crit} = Q \frac{Re_{crit}}{Re} = 1.8 \times \frac{2000}{5.35} = 673\ \frac{lit}{min}$$

$$= 11.2\ \frac{lit}{s}$$

مکانیک سیالات

جریان سیال واقعی

جریان یکنواخت آشفته و ماندگار سیال غیرقابل تراکم در مجاری بسته

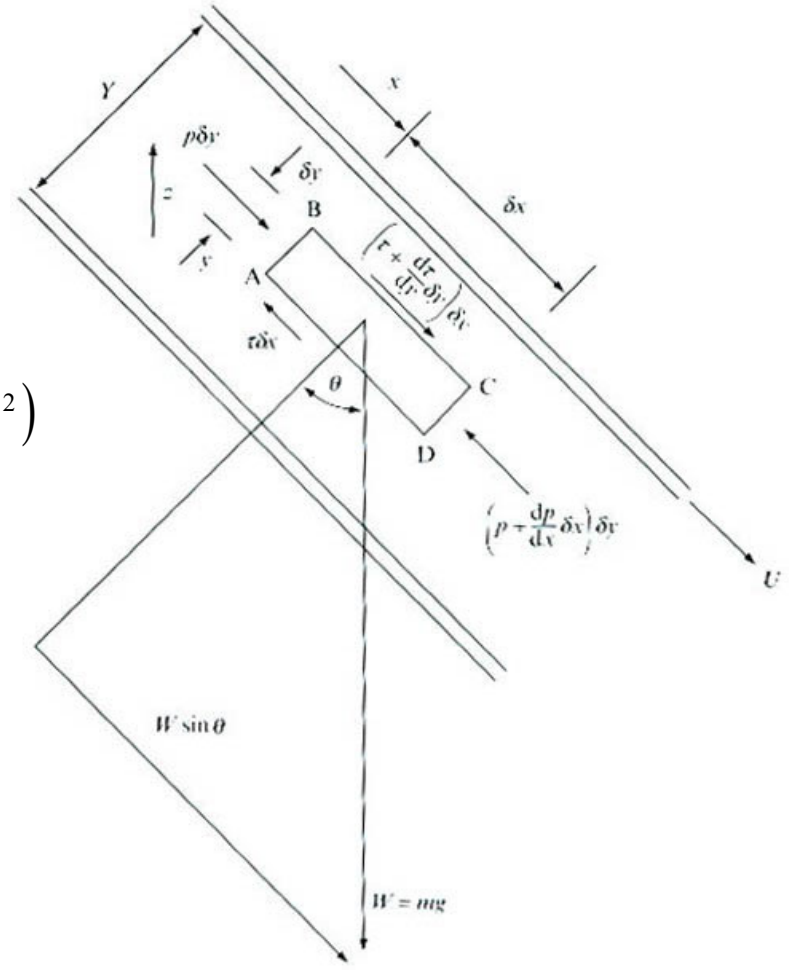
www.hadian.ir

محمدرضا هادیان
دانشگاه یزد – دانشکده مهندسی عمران

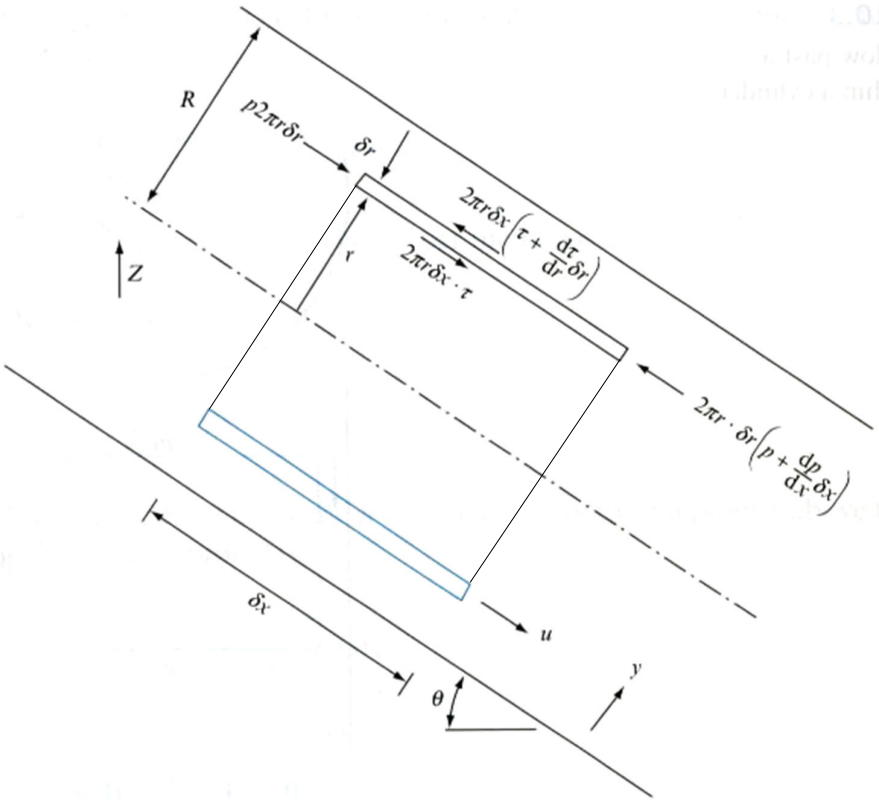
Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow Between Parallel Plates

$$u = \frac{y}{Y}U - \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}(p+\rho gz)(Yy - y^2)$$

$$q = \frac{UY}{2} - \frac{1}{2\mu}\frac{d}{dx}(p+\rho gz)\frac{Y^3}{6}$$



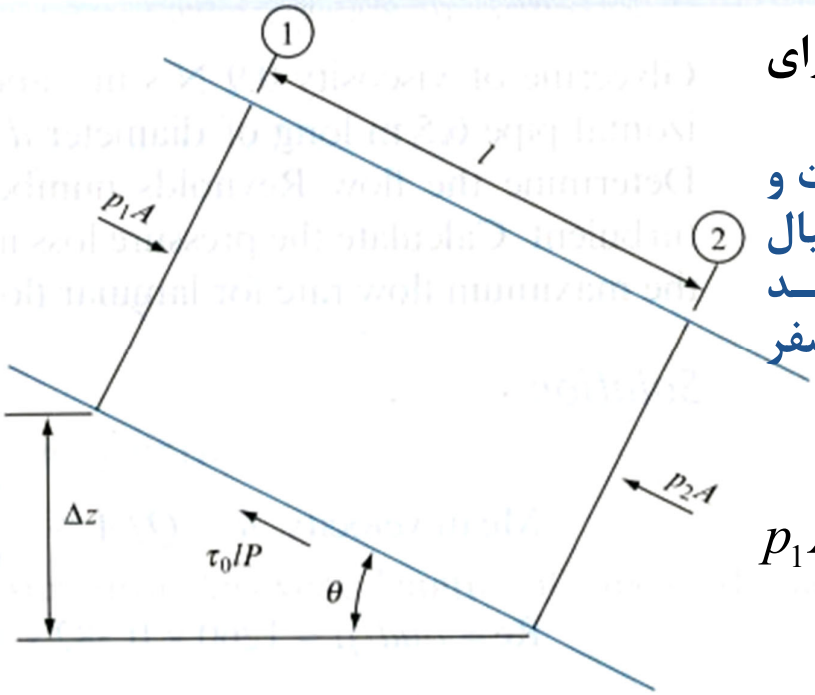
Incompressible, Steady and Uniform laminar Flow in Circular Cross-Section Pipes



$$u=-\frac{R^2-r^2}{4\mu}\frac{d}{dx}(p+\rho gz)$$

$$Q=-\frac{\pi}{8\mu}\frac{d}{dx}(p+\rho gz)R^4$$

Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Bounded Conduits



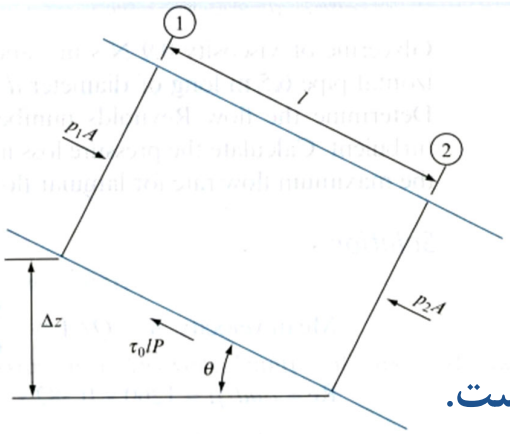
- المانی از سیال در یک مجرای بسته را در نظر بگیرید.
- چون جریان بصورت یکنواخت و ماندگار است، شتاب المان سیال صفر است. بنابراین برآیند نیروهای خارجی وارد بر المان صفر است.
- با اعمال قانون ممنتوم داریم:

$$p_1A-p_2A-\tau_0 lP+W\sin\theta=0$$

$$W=\rho gAl$$

$$\sin\theta=-\frac{\Delta Z}{l}$$

Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Bounded Conduits



$$A(p_1 - p_2) - \tau_0 lP - \rho g A \Delta z = 0$$

$$\frac{1}{l}\left[-(p_2 - p_1) - \rho g \Delta z\right] - \tau_0 \frac{P}{A} = 0$$

اولین ترم، افت فشار پیزومتریک در طول l از مجرا است.

$$\text{Hydraulic Radius, } R_h = \frac{A}{P}$$

$$\tau_0 = R_h \frac{dp^*}{dx} \qquad \text{Shear velocity, } u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

dp^*/dx نرخ افت فشار پیزومتریک در امتداد مجرا است.

Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Bounded Conduits

- برای جریان آشفته نمی‌توان رابطه مشابه رابطه جریان آرام را بکار برد.
- برای محاسبه تنش برشی دیواره، از مفهوم ضریب اصطکاک استفاده می‌شود.
- ضریب اصطکاک، یک ضریب بدون بعد است که از آزمایش بدست می‌آید.

$$\tau_0 = C_f \rho \frac{\bar{v}^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp^*}{dx} = C_f \rho \frac{\bar{v}^2}{2R_h}$$

- اگر افت هد ناشی از اصطکاک در طول l از لوله را با h_f نشان داده شود:

$$\frac{1}{\rho g}\frac{dp^*}{dx} = C_f \frac{\bar{v}^2}{2gR_h} = \frac{h_f}{l} \quad \Rightarrow \quad h_f = C_f \frac{l}{R_h}\frac{\bar{v}^2}{2g}$$

Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Circular Cross Section Pipes

- برای مقطع دایره‌ای:

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{\pi \frac{d^2}{4}}{\pi d} = \frac{d}{4} \quad \Rightarrow \quad h_f = \underbrace{4C_f}_{f} \frac{l}{d} \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

$$\text{Darcy - Weisbach equation, } h_f = f \frac{l}{d} \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

$$\tau_0 = R_h \frac{dp^*}{dx} \qquad \frac{\tau_0}{\rho} \frac{1}{g} = R_h \underbrace{\frac{1}{\rho g} \frac{dp^*}{dx}}_{\frac{h_f}{l} = S_f} \qquad \frac{u_*^2}{g} = \frac{d}{4} \frac{h_f}{l}$$

$$\frac{u_*^2}{g} = \frac{d}{4} \frac{1}{l} \left(f \frac{l}{d} \frac{\bar{v}^2}{2g} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{v}}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{f}}$$

Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Circular Cross Section Pipes

- دقت شود که برخی مراجع (کتب انگلیسی) C_f را به عنوان f در نظر گرفته‌اند و بنابراین ضریب دارسی در این مراجع یک چهارم مراجع دیگر (امریکایی) است.

- لازم است در استفاده از جداول، روابط و گراف‌ها دقت شود که رابطه دارسی چگونه تعریف شده است.

- کتاب استریتر سیستم امریکایی و کتاب داگلاس سیستم انگلیسی است.

Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Circular Cross Section Pipes

- مقدار ضریب دارسی، با استفاده از اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی تعیین می‌شود.
- این مقدار باید به نحوی تعیین شود که همواره مقدار افت اصطکاکی در لوله که از رابطه دارسی محاسبه می‌شود، مقداری صحیح باشد.
- در حالت کلی، ضریب اصطکاک دارسی تابع عوامل زیر است:

$$f = \phi(\bar{v}, d, \rho, \mu, \varepsilon, k', \alpha)$$

- ε ارتفاع متوسط زبری‌های جداره، k' متوسط فاصله زبری‌ها و α ضریب مربوط به شکل زبری‌ها است.
- ضریب دارسی به فشار وابسته نیست.
- با استفاده از آنالیز ابعادی می‌توان عوامل موثر را بصورت زیر دسته‌بندی کرد:

$$f = \phi\left(\frac{\rho \bar{v} d}{\mu}, \frac{\varepsilon}{d}, \frac{k'}{d}, \alpha\right) \Rightarrow f = \phi\left(\mathrm{Re}, \frac{\varepsilon}{d}, \frac{k'}{d}, \alpha\right)$$

Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Circular Cross Section Pipes

- آنالیز ابعادی تنها نحوه ارتباط عوامل موثر در یک پدیده را مشخص می‌کند و نمی‌تواند رابطه جبری مربوطه را مشخص کند.
- رابطه جبری برای تعیین ضریب دارسی تنها با استفاده از اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی امکان‌پذیر است.

لوله‌های صاف:

- Blasius(1913) برای اولین بار رابطه‌ای دقیق برای تعیین ضریب دارسی در لوله‌های صاف ارائه داد.

$$f = \frac{0.3164}{\mathrm{Re}^{\frac{1}{4}}}$$

- رابطه بلاسیوس، افت اصطکاکی در لوله‌های صاف را با دقت $\pm 5\%$ تا حدود عدد رینولدز $100\,000$ محاسبه می‌کند.

- رابطه Nikuradse:

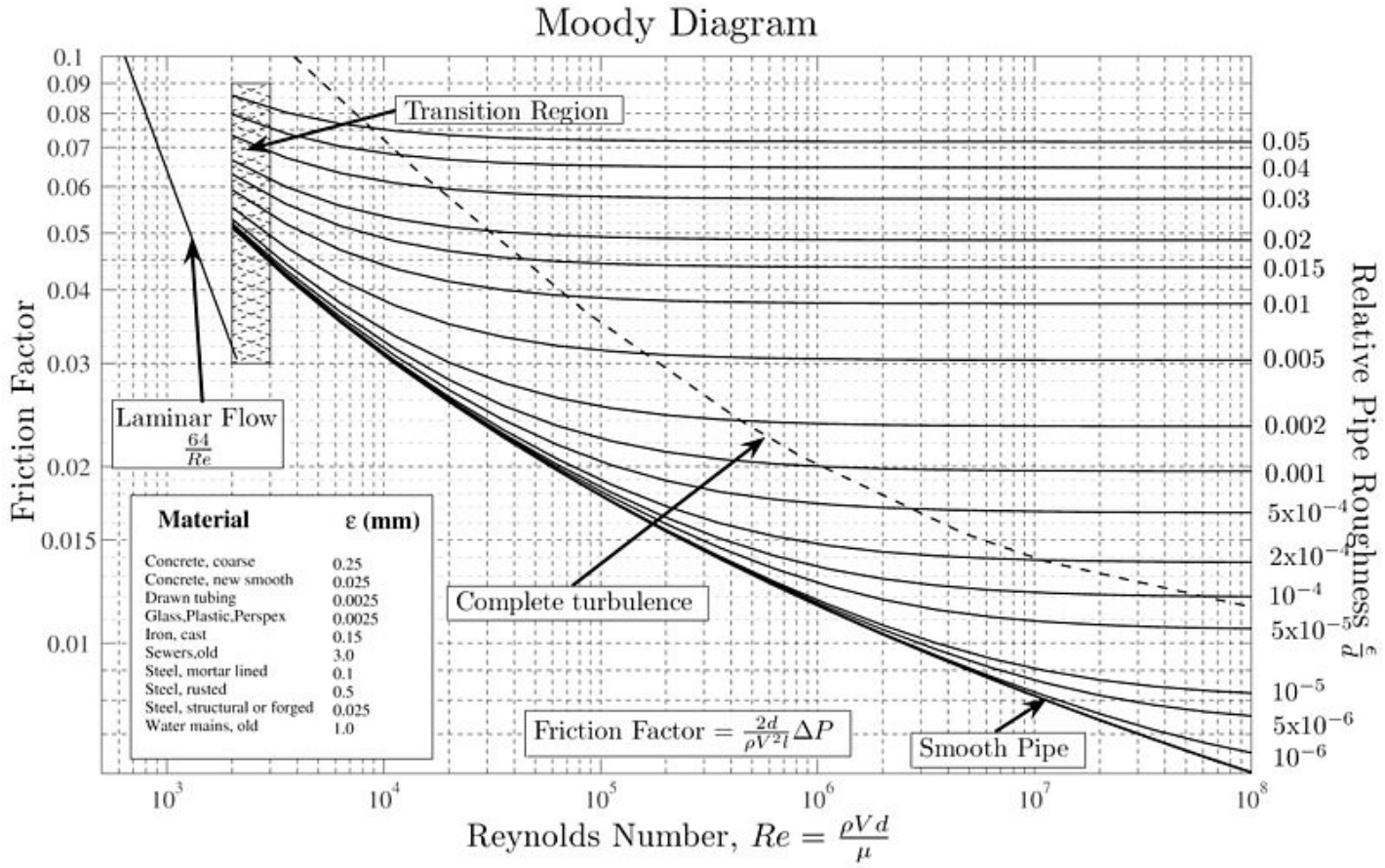
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(\mathrm{Re}\sqrt{f}\right) - 0.08$$

Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Circular Cross Section Pipes

لوله‌های زبر:

- مشاهدات آزمایشگاهی نشان دادند که اثر فاصله زبری‌ها و شکل آنها در مقایسه با ارتفاع زبری‌ها بسیار ناچیز است و لذا از اثر آنها صرف‌نظر می‌شود.
- متداول‌ترین روش برای محاسبه ضریب دارسی در حالت آشفته استفاده از دیاگرام Moody است.
- در دیاگرام Moody، ضریب دارسی f بر حسب عدد رینولدز برای محدوده‌ای از مقادیر ε/d ترسیم شده است.
- دقت شود که محورهای دیاگرام بصورت لگاریتمی است.

Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Circular Cross Section Pipes



Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Circular Cross Section Pipes

نواحی مختلف در دیاگرام Moody:

- **ناحیه جریان آرام بصورت یک خط صاف (رابطه Poiseuille)**
  - در این ناحیه ضریب f تنها تابع عدد رینولدز است.

$$Q = \frac{\Delta p\, \pi d^4}{128\, \mu l} \quad \Rightarrow \quad h_f = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{128\, \mu l Q}{\rho g \pi d^4}$$

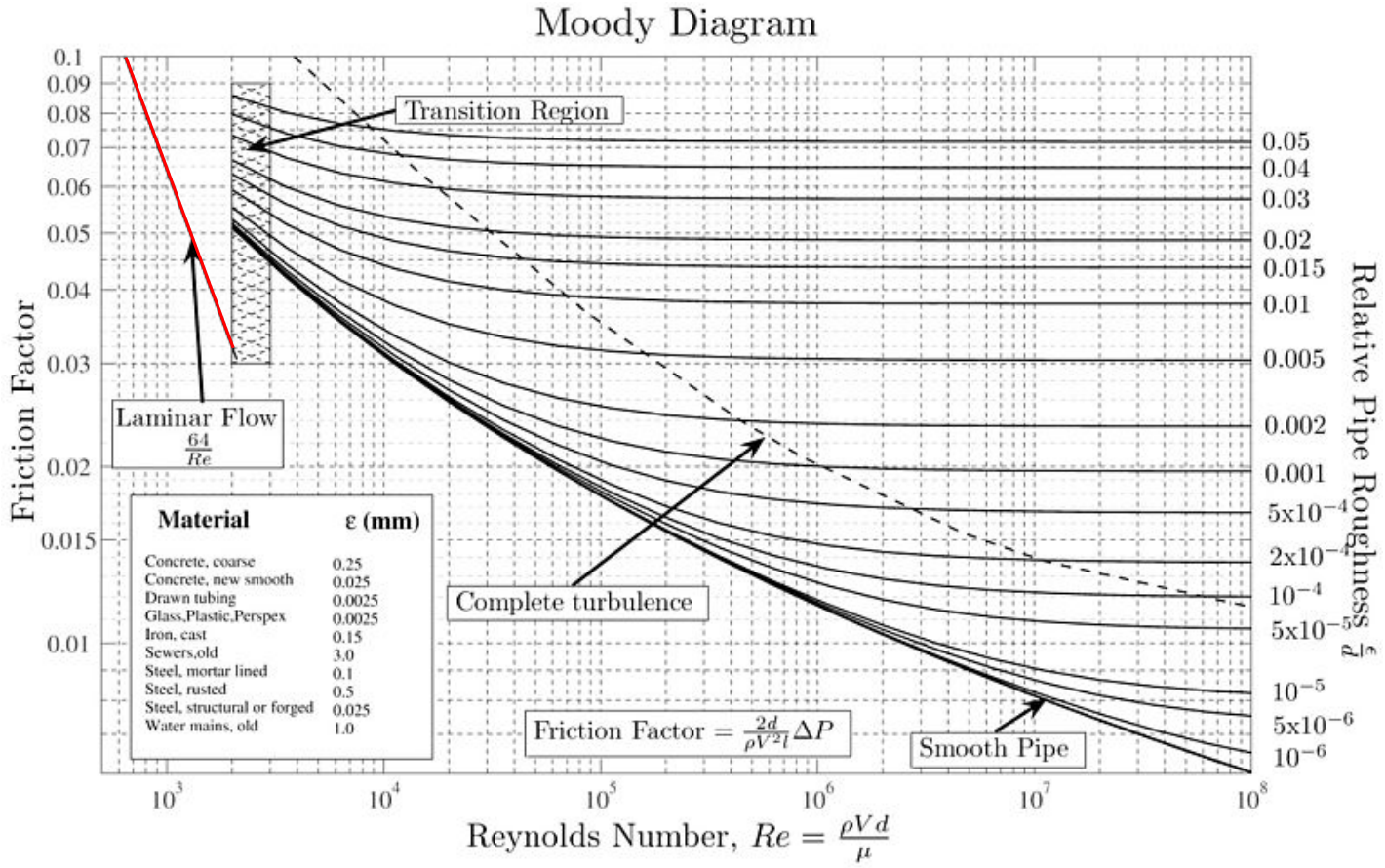
$$Q = \pi \frac{d^2}{4} \bar{v} \qquad h_f = \frac{128\, \mu l}{\rho g \pi d^4} \left(\pi \frac{d^2}{4} \bar{v} \right) = \frac{32\, \mu l}{\rho g d^2} \bar{v}$$

$$h_f = f \frac{l}{d} \frac{\bar{v}^2}{2g}$$

$$f = \frac{64\, \mu}{\rho \bar{v} d}$$

$$\boxed{f = \frac{64}{\mathrm{Re}}}$$

Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Circular Cross Section Pipes



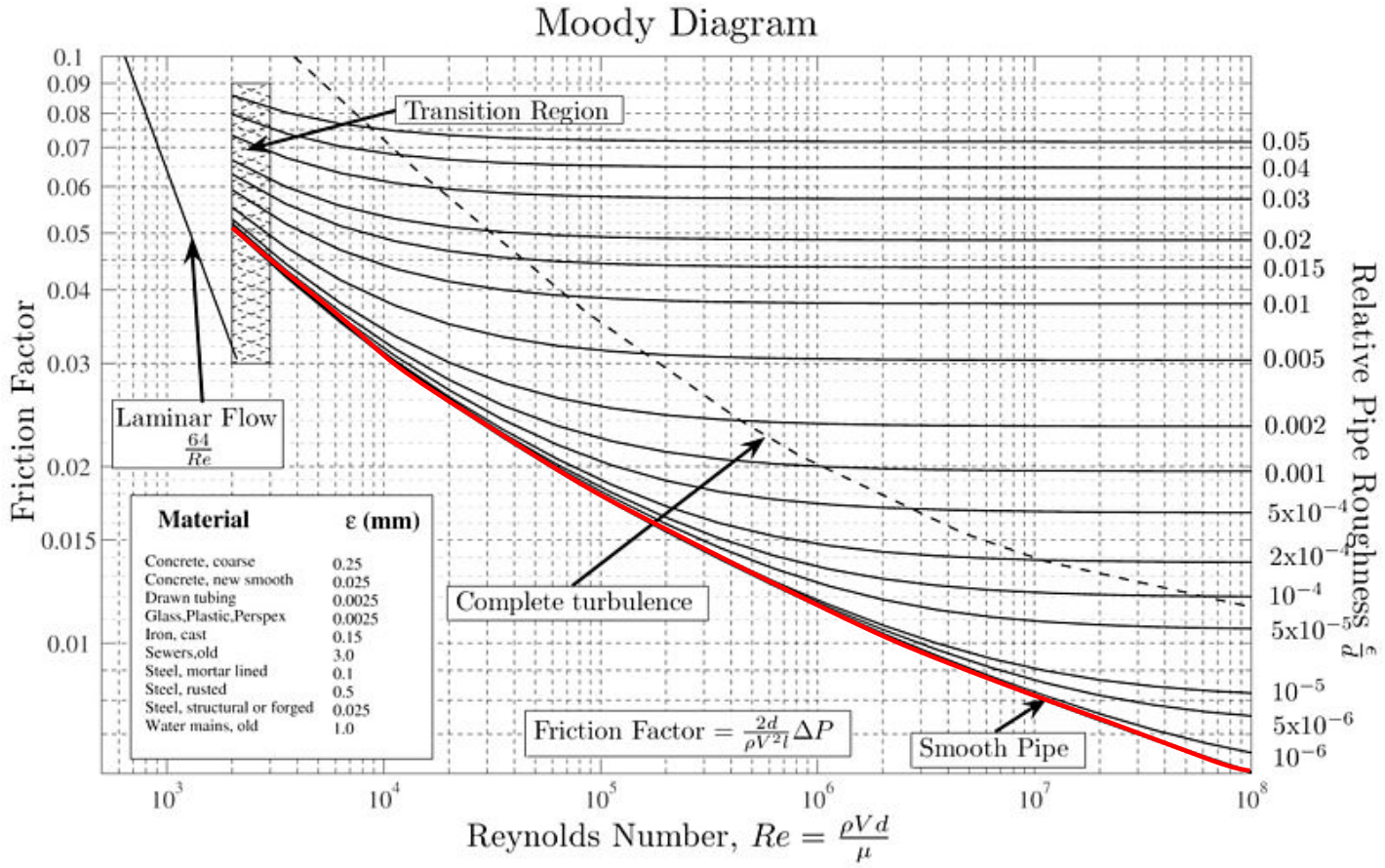
Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Circular Cross Section Pipes

نواحی مختلف در دیاگرام Moody:

- برای $\varepsilon/d<0.001$ با کاهش عدد رینولدز، مقدار f به رابطه Blasius نزدیک می‌شود. (بدلیل وجود زیرلایه ورقه‌ای در نزدیکی مرز جامد)

$$f = \frac{0.3164}{\mathrm{Re}^{\frac{1}{4}}}$$

Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Circular Cross Section Pipes



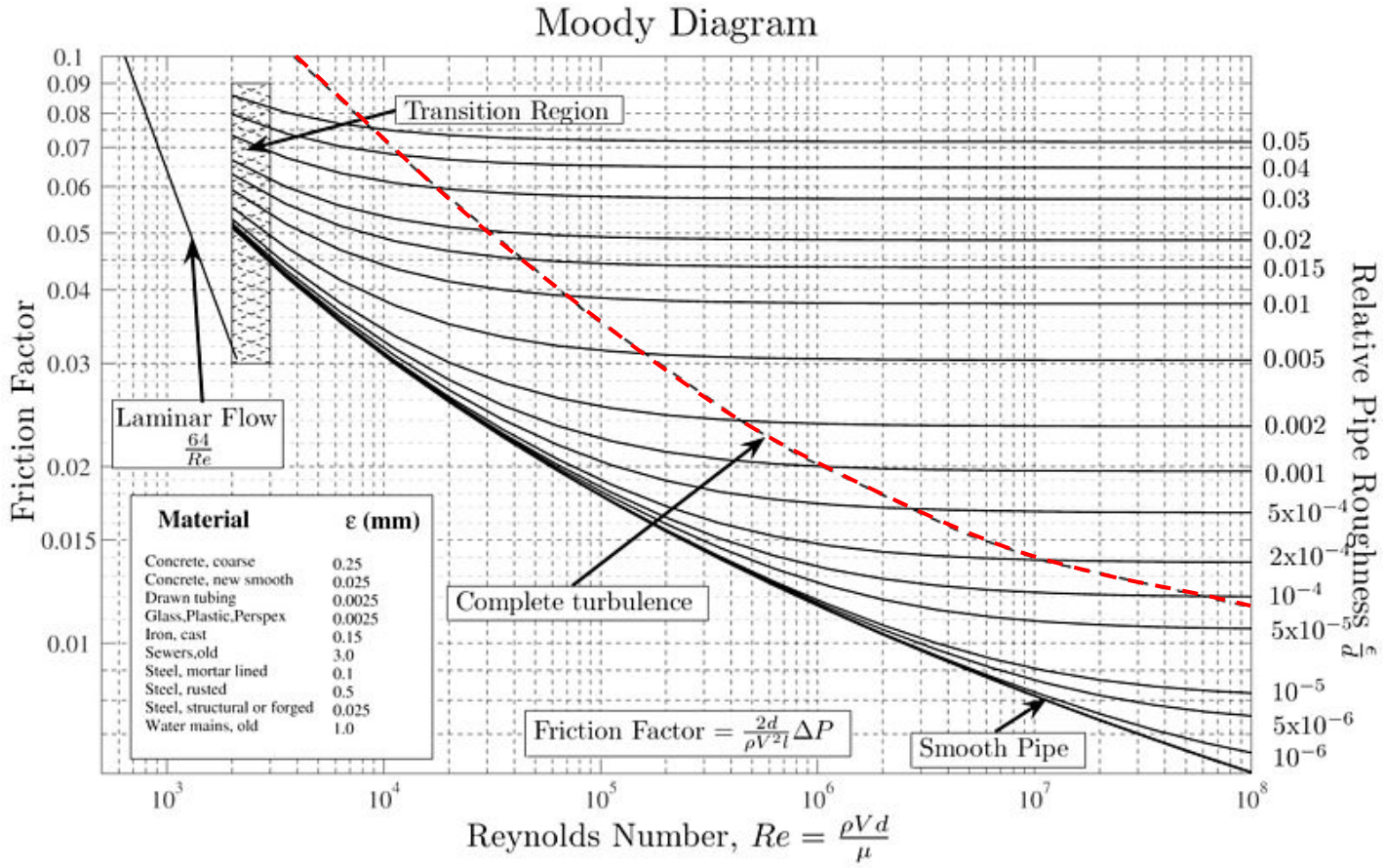
Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Circular Cross Section Pipes

نواحی مختلف در دیاگرام Moody:

- در اعداد رینولدز بالا، یا ε/d زیاد، مقدار f به یک مقدار ثابت نزدیک می‌شود و دیگر عدد رینولدز بر آن تأثیری ندارد (بدلیل خارج شدن زبری‌ها از زیرلایه ورقه‌ای)این ناحیه ناحیه جریان آشفته در لوله‌های زبر است و ضریب f تنها تابع ε/d است.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 0.869 \ln\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)$$

Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Circular Cross Section Pipes

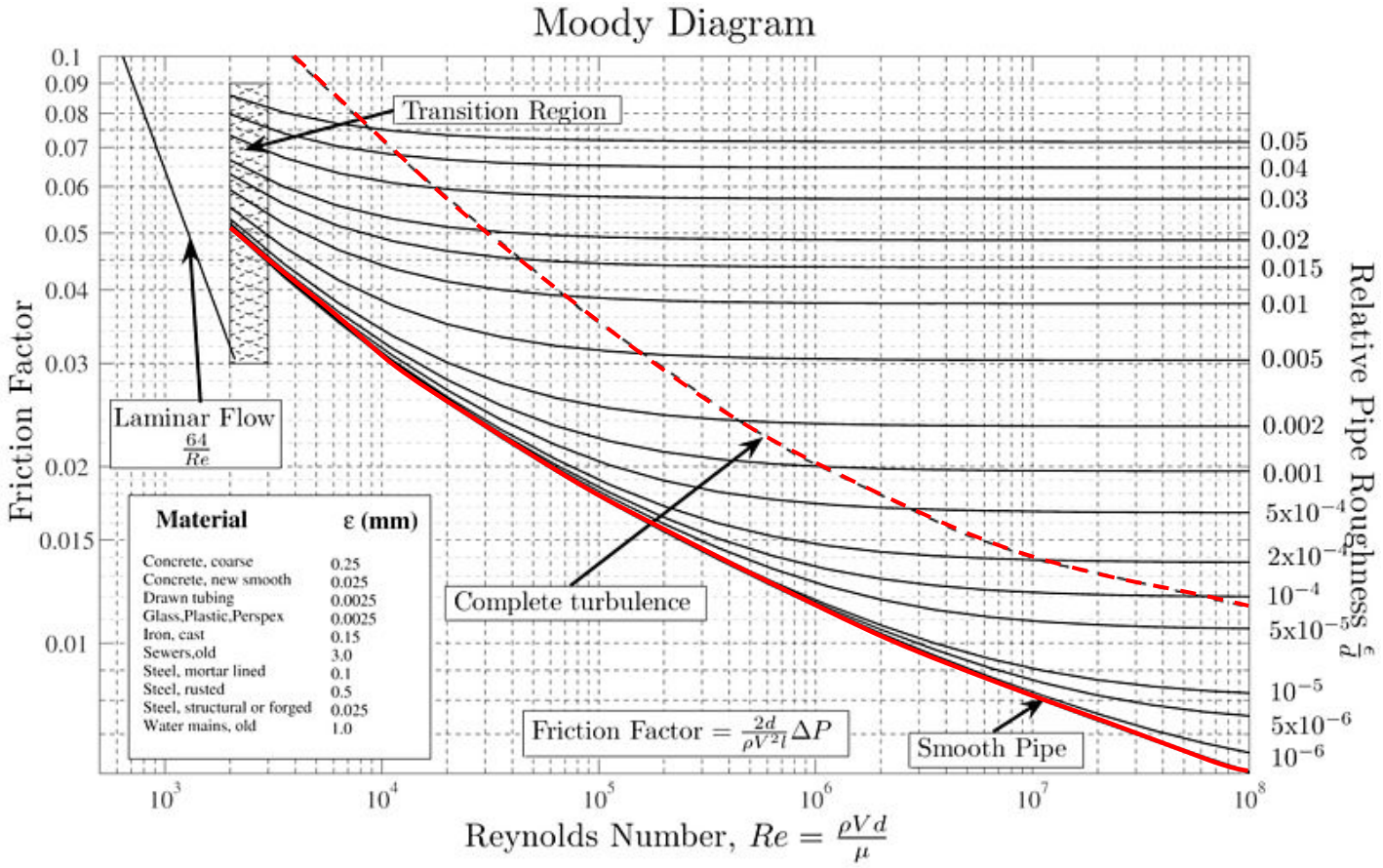


Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Circular Cross Section Pipes

نواحی مختلف در دیاگرام Moody:

- ناحیه انتقالی که در آن ضریب f تابع ε/d و عدد رینولدز است.

Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Circular Cross Section Pipes



Incompressible, Steady and Uniform Turbulent Flow in Circular Cross Section Pipes

- رابطه Colebrook and White (1937) برای همه مقادیر رینولدز و زبری نسبی:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.869 \ln\left(\frac{\varepsilon/d}{3.7} + \frac{2.523}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)$$

- بجای رابطه ضمنی فوق می‌توان با در نظر گرفتن محدودیت داده شده از رابطه صریح زیر با 1% خطا استفاده نمود.

$$f = \frac{1.325}{\left\{\ln\left(\frac{\varepsilon/d}{3.7} + \frac{5.74}{\mathrm{Re}^{0.9}}\right)\right\}^2} \quad , \quad \begin{Bmatrix} 10^{-6} \le \dfrac{\varepsilon}{d} \le 10^{-2} \\ 5000 \le \mathrm{Re} \le 10^{8} \end{Bmatrix}$$

مثال

در یک خط لوله افقی به قطر 40 mm ، طول 750 m و زبری مطلق 0.00008 m، آب با ویسکوزیته دینامیک 1.14×10^{-3} Ns/m² جریان دارد. افت هد و توان لازم برای برقراری جریان را در دو حالت زیر محاسبه کنید.

- دبی جریان 4 lit/min باشد.
- دبی جریان 30 lit/min باشد.

ابتدا باید عدد رینولدز محاسبه شده و نوع جریان مشخص شود.

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \bar{v} d}{\mu} \qquad Q = 4.0 \times \frac{10^{-3}}{60} = 66.7\times10^{-6}\ \frac{\mathrm{m}^3}{s} \qquad A = \pi \frac{0.04^2}{4} = 1.26\times10^{-3}\ \mathrm{m}^2$$

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{66.7\times10^{-6}}{1.26\times10^{-3}} = 52.9\times10^{-3}\ \frac{\mathrm{m}}{s}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \bar{v} d}{\mu} = \frac{1000\times52.9\times10^{-3}\times0.04}{1.14\times10^{-3}} = 1856 < 2000$$

جریان آرام است

مثال

روش اول: استفاده از رابطه Poiseuille:

$$\Delta p = \frac{128\,\mu l Q}{\pi d^4} = \frac{128\times 1.14\times 10^{-3}\times 750\times 66.7\times 10^{-6}}{\pi\times 0.04^4} = 907.6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{907.6}{1000\times 9.81} = 92.4\times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

روش دوم: استفاده از رابطه دارسی

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{64}{1856} = 0.03448$$

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{\bar{v}^2}{2g} = 0.03448\,\frac{750}{0.04}\,\frac{\left(52.9\times 10^{-3}\right)^2}{2\times 9.81} = 92.4\times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

$$P = \rho g h_f Q = 1000\times 9.81\times 92.4\times 10^{-3}\times 66.7\times 10^{-6} = 0.0605\ \mathrm{W}$$

مثال

$$Q = 30.0\times\frac{10^{-3}}{60} = 0.5\times 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}^3}{s} \qquad \bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{0.5\times 10^{-3}}{1.26\times 10^{-3}} = 0.4\,\frac{\mathrm{m}}{s}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\bar{v}d}{\mu} = \frac{1000\times 0.4\times 0.04}{1.14\times 10^{-3}} = 14035 > 2000$$

جریان آشفته است

$$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{0.00008}{0.04} = 0.002 \qquad f = 0.032$$

$$h_f = f\frac{l}{d}\frac{\bar{v}^2}{2g} = 0.032\,\frac{750}{0.04}\,\frac{(0.4)^2}{2\times 9.81} = 4.89\ \mathrm{m}$$

$$P = \rho g h_f Q = 1000\times 9.81\times 4.89\times 0.5\times 10^{-3} = 24.0\ \mathrm{W}$$