

مکانیک سیالات

معادله انرژی

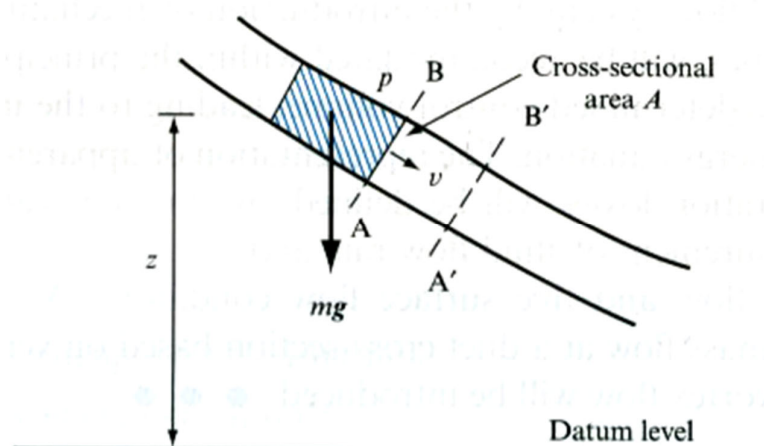
www.hadian.ir



محمد رضا هادیان
دانشگاه یزد – دانشکده مهندسی عمران

معادله انرژی

● برای هر المان سیال می توان میزان انرژی مکانیکی آن را محاسبه نمود.



$$\text{Potential energy} = mgz$$

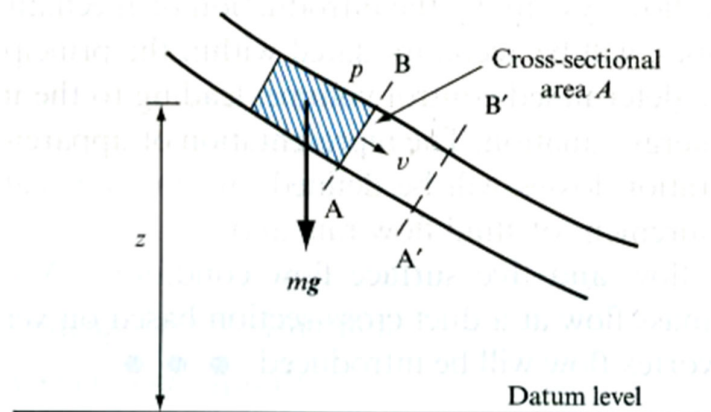
$$\text{Potential energy per unit weight} = z$$

$$\text{Kinetic energy} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{Kinetic energy per unit weight} = \frac{v^2}{2g}$$

معادله انرژی

در سیالات، فشار نیز می تواند کار انجام دهد و لذا باید انرژی پتانسیل مربوط به فشار را هم منظور کرد.

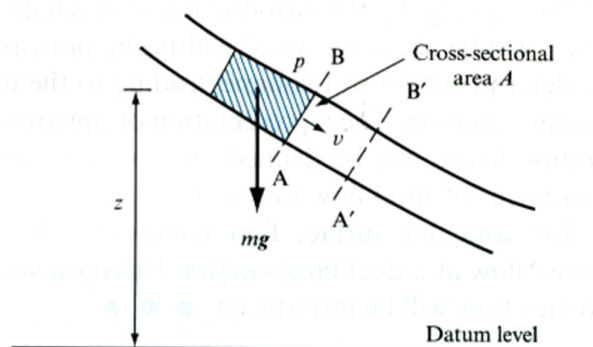


برای مقطع AB که در آن فشار p و سطح مقطع لوله جریان A است، با حرکت جریان و رسیدن مقطع به $A'B'$ کار انجام شده توسط فشار را می توان برای جرم عبوری m محاسبه نمود.

$$\text{Force exerted on AB} = pA$$

$$\text{Volume passing AB} = \frac{m}{\rho}$$

معادله انرژی



$$\text{Force exerted on AB} = pA$$

$$\text{Volume passing AB} = \frac{m}{\rho}$$

$$\text{Distance AA'} = \frac{m}{\rho A}$$

$$\text{Work done} = \text{Force} \times \text{Distance AA'}$$

$$= pA \times \frac{m}{\rho A}$$

$$\text{Work done per unit weight} = \frac{p}{\rho g}$$

معادله انرژی

- کل انرژی سیال مجموع انرژی پتانسیل، جنبشی و انرژی فشار است. که انرژی فشار مخصوص سیالات است.
- کل انرژی سیال در واحد وزن سیال برابر است با:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Pressure} & & \text{kinetic} & & \text{Potential} & & \\ \text{energy per} & + & \text{energy per} & + & \text{energy per} & = & \text{Total energy per} \\ \text{unit weight} & & \text{unit weight} & & \text{unit weight} & & \text{unit weight} \end{array} = \text{constant}$$

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = H$$

- ترم‌های معادله بالا از جنس طول هستند و به عنوان هد فشار، هد سرعت و هد انرژی پتانسیل شناخته می‌شوند.

معادله انرژی

- بین هر دو نقطه ۱ و ۲ که روی یک خط جریان (واقعی یا فرضی) باشند، رابطه انرژی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

- معادله بالا با این فرض نوشته شده که بین دو نقطه هیچ افت یا ورود انرژی وجود نداشته باشد.
- با استفاده از پمپ، می‌توان به سیال انرژی داد.
- در اثر اصطکاک، بخشی از انرژی سیال تلف می‌شود. همچنین در برخی ماشین‌ها مثل توربین انرژی از سیال گرفته می‌شود.
- برای اعمال تلفات و ورود انرژی معادله برنولی برای جریان از ۱ به ۲ بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Total energy} & & \text{Total energy} & & \text{Losses per} & & \text{Work done} & & \text{Energy supplied} \\ \text{per unit} & = & \text{per unit} & + & \text{unit} & + & \text{per unit} & - & \text{per unit} \\ \text{weight at 1} & & \text{weight at 2} & & \text{weight} & & \text{weight} & & \text{weight} \end{array}$$

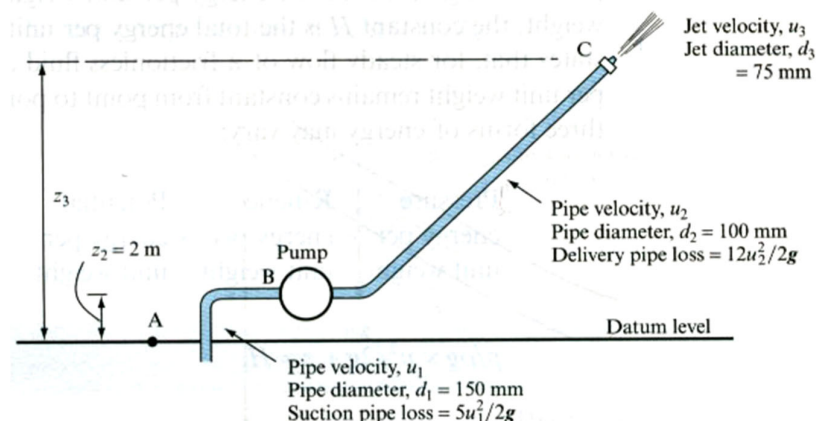
$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h + w - q$$

مثال

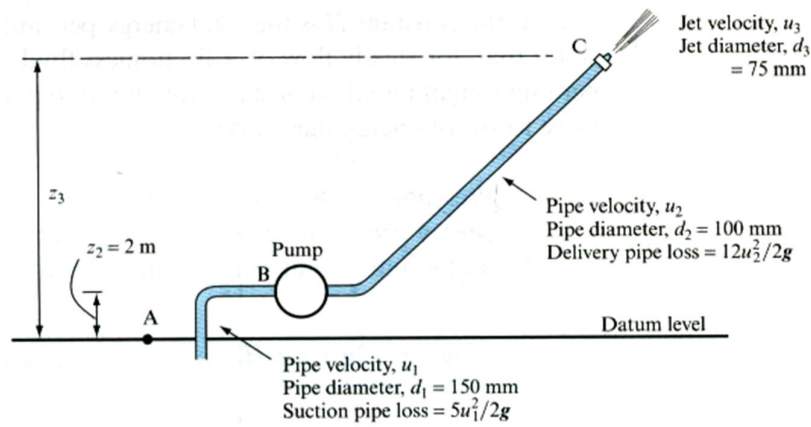
یک پمپ آتش‌نشانی به آب انرژی برابر با ۵۰ متر می‌دهد. این پمپ آب را از مخزنی که ۲ متر از تراز پمپ پایین‌تر است توسط یک لوله به قطر 150 mm مکیده و به لوله به قطر 100 mm وارد می‌کند. در انتهای لوله خروجی یک نازل به قطر 75 mm در ارتفاعی به اندازه ۳۰ متر بالاتر از تراز پمپ قرار دارد. اگر افت ورود جریان به لوله مکش و افت اصطکاکی آن به میزان $5u_1^2/2g$ و افت اصطکاکی در لوله خروجی به اندازه $12u_2^2/2g$ باشد.

❖ سرعت جریان خروجی از نازل چقدر است؟

❖ فشار را در لوله مکش در نقطه B که قبل از پمپ است، محاسبه کنید.



مثال



$$p_A = 0; v_A = 0; z_A = 0$$

$$p_C = 0; v_C = u_3; z_C = 30 + 2 = 32 \text{ m}$$

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_C}{\rho g} + \frac{v_C^2}{2g} + z_C + (h + w - q)_{A \text{ to } C}$$

$$0 + 0 + 0 = 0 + \frac{u_3^2}{2g} + 32 + \left(\left\{ 5 \frac{u_1^2}{2g} + 12 \frac{u_2^2}{2g} \right\} + 0 - 50 \right)_{A \text{ to } C}$$

$$u_3^2 + 5u_1^2 + 12u_2^2 = 2g \times 18$$

مثال

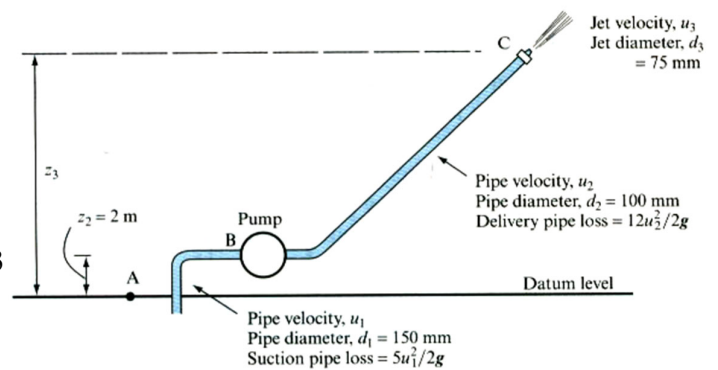
$$\frac{\pi d_1^2}{4} u_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} u_2 = \frac{\pi d_3^2}{4} u_3$$

$$u_1 = \left(\frac{d_3}{d_1} \right)^2 u_3 = \left(\frac{75}{150} \right)^2 u_3 = \frac{1}{4} u_3$$

$$u_2 = \left(\frac{d_3}{d_2} \right)^2 u_3 = \left(\frac{75}{100} \right)^2 u_3 = \frac{9}{16} u_3$$

$$u_3^2 \left(1 + 5 \times \left(\frac{1}{4} \right)^2 + 12 \left(\frac{9}{16} \right)^2 \right) = 2g \times 18$$

$$u_3 = 8.314 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



مثال

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B + (h + w - q)_{A \text{ to } B}$$

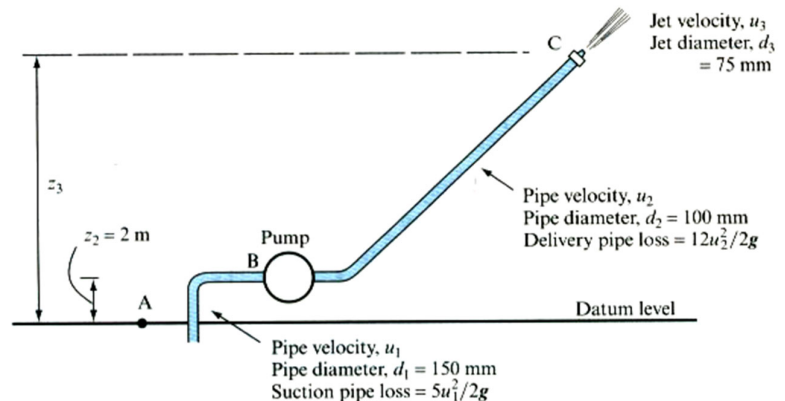
$$0 + 0 + 0 = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + z_B + \left(5 \frac{u_1^2}{2g} + 0 - 0 \right)$$

$$\frac{p_B}{\rho g} = -z_B - 6 \frac{u_1^2}{2g}$$

$$u_1 = \frac{1}{4} u_3 = \frac{8.314}{4} = 2.079 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{p_B}{\rho g} = -2 - 6 \frac{2.079^2}{2 \times 9.81} = -3.32 \text{ m}$$

$$p_B = -1000 \times 9.81 \times 3.32 = -32.569 \text{ kPa}$$



ضرب تصحیح انرژی جنبشی

● در استخراج معادله برنولی، و معادله انرژی برای حالت ماندگار، توزیع سرعت را در مقطع لوله جریان بصورت یکنواخت فرض کردیم.

● در جریان سیال واقعی که تنش برشی در لایه‌های سیال توسعه می‌یابد و بدلیل وجود مرزهای جامد، جریان در مقاطع ورودی و خروجی یکنواخت نیست.

● برای استفاده از معادله انرژی یا برنولی در جریان واقعی می‌توان مقدار انرژی جنبشی عبوری از مقطع را با انترال گیری محاسبه نمود.

$$\text{Mass passing through element per unit time} = \rho \delta A u$$

$$\begin{aligned} \text{Kinetic energy per unit time passing through element} &= \frac{1}{2} \times \text{Mass per unit time} \times (\text{Velocity})^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho \delta A u^3 \end{aligned}$$

ضریب تصحیح انرژی جنبشی

$$\begin{aligned} \text{Total kinetic energy} \\ \text{passing in unit time} \end{aligned} = \int \frac{1}{2} \rho u^3 \delta A$$

$$\text{Total weight passing in unit time} = \int \rho g u \delta A$$

$$\text{True kinetic energy per unit weight} = \frac{1}{2g} \frac{\int \rho u^3 \delta A}{\int \rho u \delta A}$$

در صورتی که بخواهیم از سرعت متوسط برای محاسبه انرژی جنبشی کل استفاده کنیم:

$$\text{True kinetic energy per unit weight} = \alpha \frac{\bar{u}^2}{2g}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{A} \int u dA$$

ضریب تصحیح انرژی جنبشی

$$\alpha = \frac{\int \rho u^3 \delta A}{\bar{u}^2 \int \rho u \delta A}$$

$$\alpha = \frac{\int u^3 dA}{A \bar{u}^3} = \frac{1}{A} \int \left(\frac{u}{\bar{u}} \right)^3 dA$$

برای یک لوله با جریان آشفته، توزیع سرعت در مقطع از رابطه توانی زیر تبعیت می‌نماید. برای این جریان، ضریب تصحیح انرژی جنبشی را محاسبه کنید.

$$u = u_{\max} \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{7}} \quad \bar{u} = \frac{49}{60} u_{\max} \quad \beta = 1.02$$

$$\alpha = \frac{1}{A} \int \left(\frac{u}{\bar{u}} \right)^3 dA = \frac{1}{\pi R^2} \int \left(\frac{u_{\max} \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{7}}}{\frac{49}{60} u_{\max}} \right)^3 dA = \frac{1}{\pi R^2 R^{\frac{3}{7}}} \left(\frac{60}{49} \right)^3 \int y^{\frac{3}{7}} dA$$

ضریب تصحیح انرژی جنبشی

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\pi R^{\frac{17}{7}}} \left(\frac{60}{49} \right)^3 \int_0^R y^{\frac{3}{7}} 2\pi r dr = \frac{2}{R^{\frac{17}{7}}} \left(\frac{60}{49} \right)^3 \int_R^0 y^{\frac{3}{7}} (R-y)(-dy) \\ &= -\frac{2}{R^{\frac{17}{7}}} \left(\frac{60}{49} \right)^3 \int_R^0 \left(Ry^{\frac{3}{7}} - y^{\frac{10}{7}} \right) dy = -\frac{2}{R^{\frac{17}{7}}} \left(\frac{60}{49} \right)^3 \left[\frac{7}{10} Ry^{\frac{10}{7}} - \frac{7}{17} y^{\frac{17}{7}} \right]_R^0 \\ &= 2 \left(\frac{60}{49} \right)^3 \frac{49}{170} = \frac{43200}{40817}\end{aligned}$$

$$\alpha = 1.058$$

$$\beta = 1.02$$

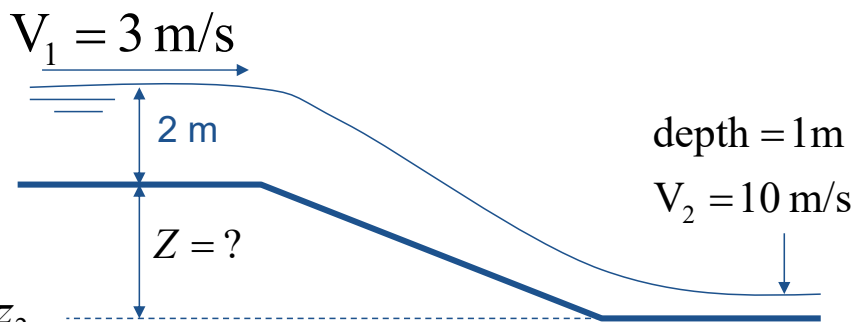
معادله انرژی

$$H = \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g} + z$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\bar{v}_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + z_2 + h + w - q$$

معادله انرژی

Loss is negligible



$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$\frac{\rho g \times 2}{\rho g} + \frac{3^2}{2 \times 9.81} + z_1 = \frac{\rho g \times 1}{\rho g} + \frac{10^2}{2 \times 9.81} + 0.$$

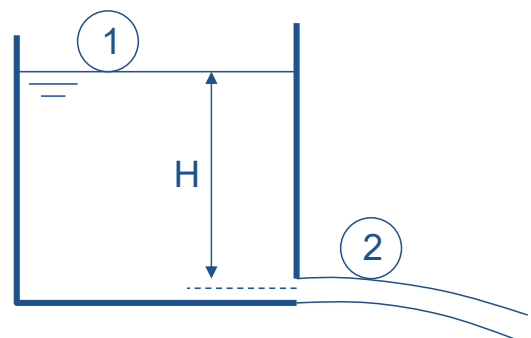
$$z_1 = 3.64 \text{ m}$$

معادله انرژی

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_f$$

$$0. + 0. + H = 0. + \frac{V_2^2}{2g} + 0. + 0.$$

$$V_2 = \sqrt{2gH}$$

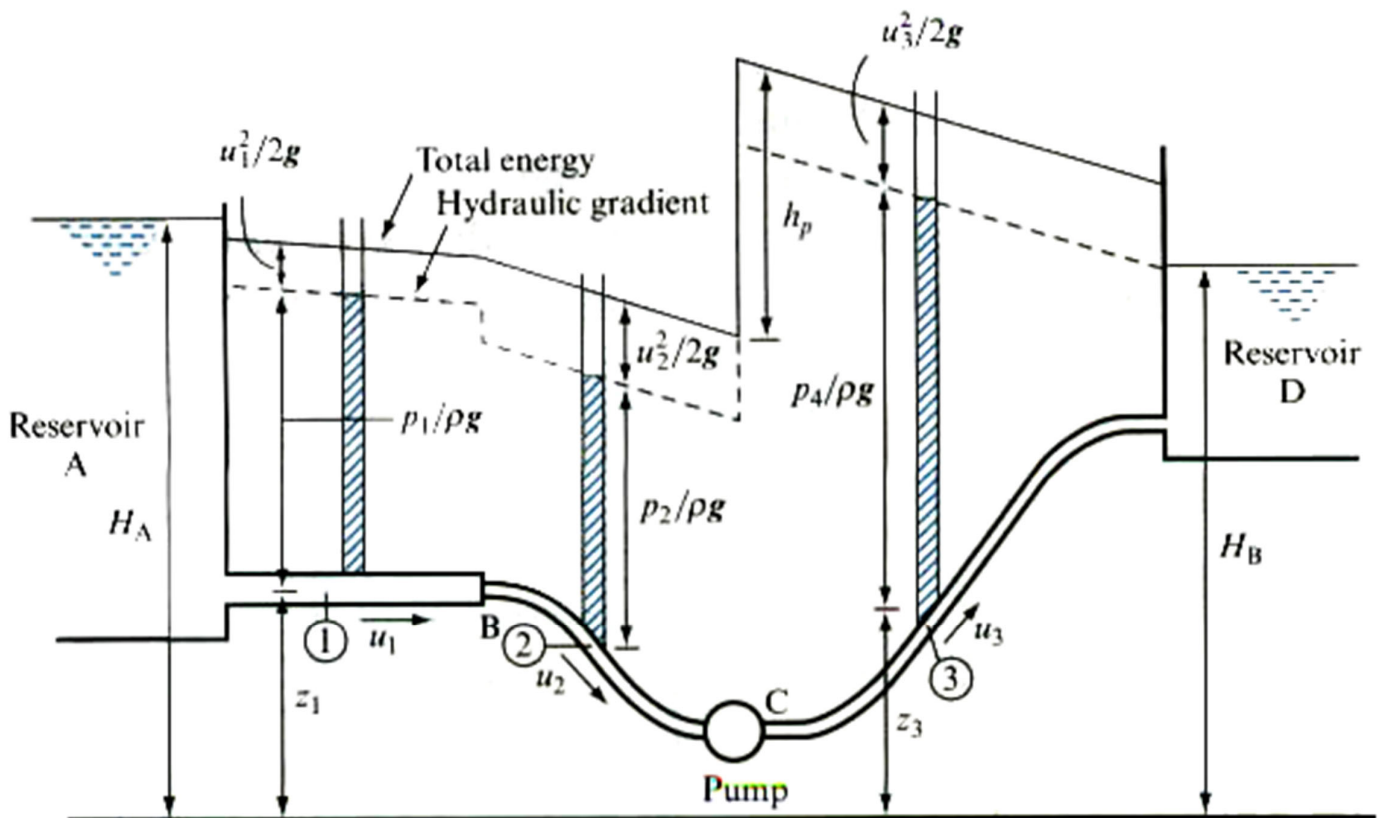


معادله انرژی

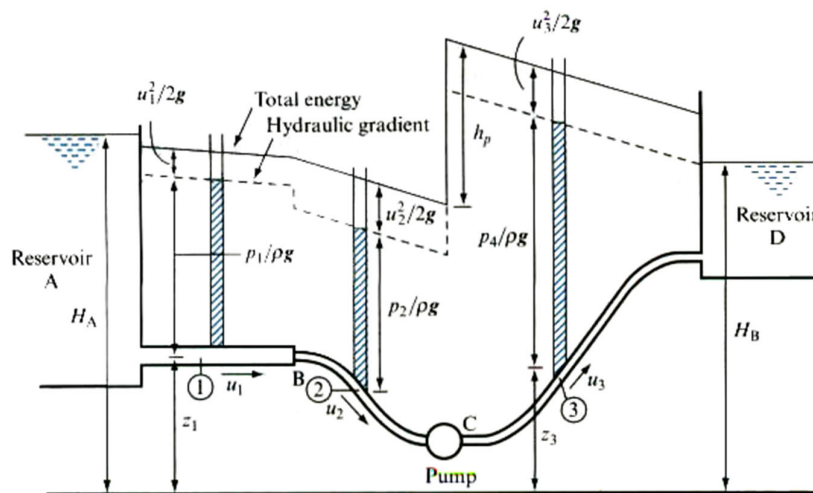
Total energy per unit weight at 1 = Total energy per unit weight at 2 + Losses per unit weight + Work done per unit weight - Energy supplied per unit weight

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\bar{v}_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + z_2 + h + w - q$$

انرژی کل و خط گرادین هیدرولیکی

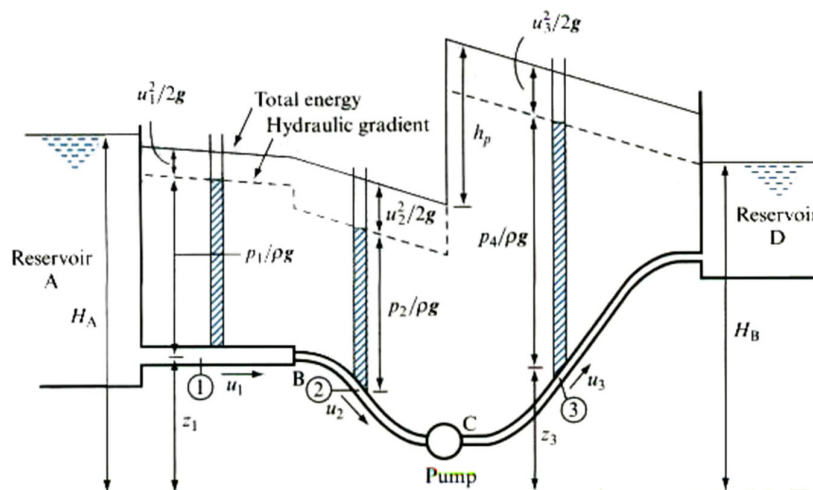


انرژی کل و خط گرادیان هیدرولیکی



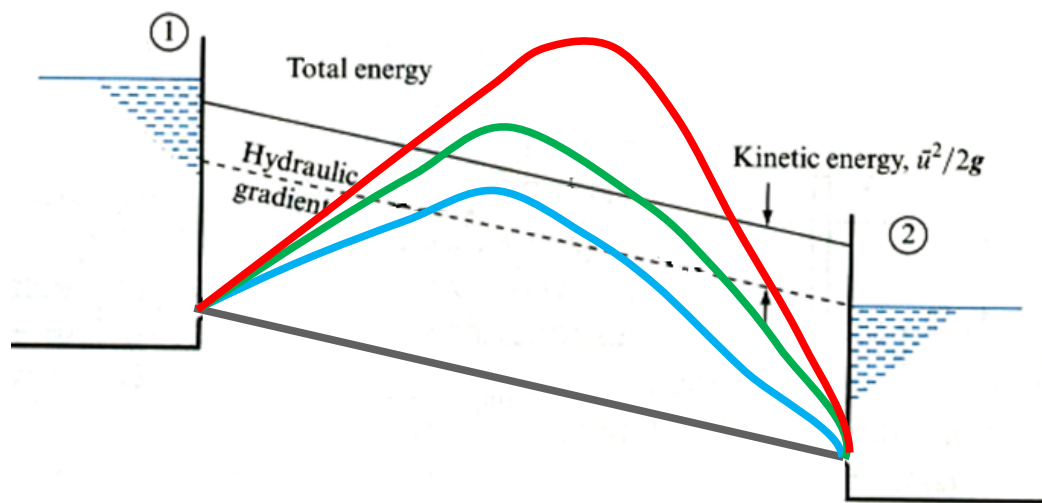
- دلیل افت اصطکاکی در لوله، خط انرژی کل همواره به سمت پائین حرکت می‌کند که شیب آن به میزان استهلاک انرژی در لوله یا داکت بستگی دارد.
- خط انرژی تنها در صورتی که به جریان انرژی داده شود، صعود می‌کند (وجود یک پمپ).
- خط انرژی در جاهایی که افت انرژی موضعی داشته باشیم یا دستگاه‌هایی که انرژی را از جریان می‌گیرند (مثل توربین) افت ناگهانی دارد.

انرژی کل و خط گرادیان هیدرولیکی

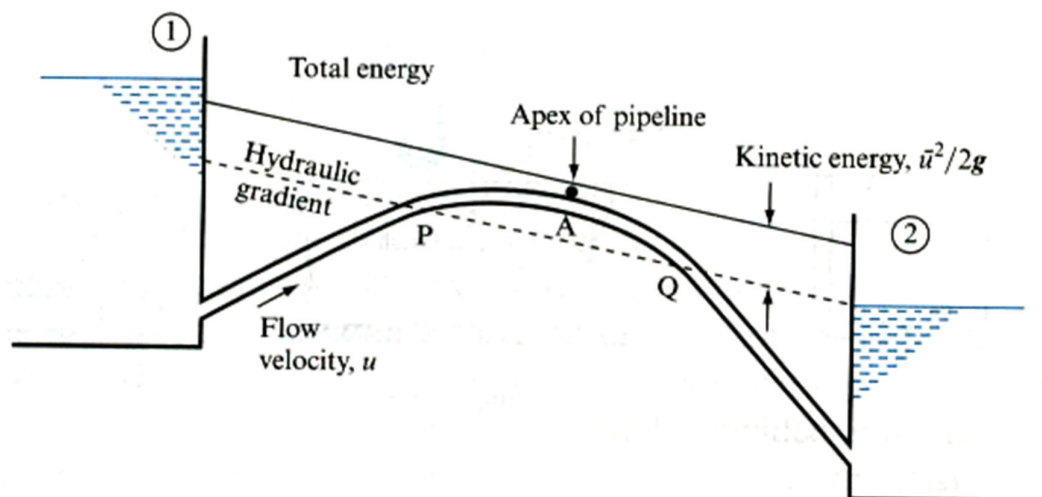


- اگر یک پیزومتر در هر قسمت از لوله به آن وصل شود، مایع در آن به اندازه $p/\rho g$ بالا می‌رود. تراز مربوط به مجموع $z + p/\rho g$ که همان خط تراز مایع در پیزومتر می‌باشد را خط گرادیان هیدرولیکی می‌گویند.
- خط گرادیان هیدرولیکی در هر لوله با مقطع ثابت، به موازات خط انرژی کل قرار دارد. (به اندازه هد سرعت از خط انرژی کل پائین‌تر است).

انرژی کل و خط گرادیان هیدرولیکی



انرژی کل و خط گرادیان هیدرولیکی



- در قسمت PQ که خط گرادیان هیدرولیکی پائین تر از لوله قرار گرفته است، ارتفاع پیزومتریک پائین تر از لوله است که به معنی فشار نسبی منفی در لوله می باشد و لوله بصورت سیفون کار می کند.
- فشار منفی نمی تواند از حد فشاربخار مایع فراتر رود و در صورت ایجاد فشار کمتر، مایع بخار شده و جریان قطع می شود.

توان جریان سیال

- یک جریان سیال می تواند با انرژی که دارد (ناشی از فشار، سرعت و ارتفاع) کار انجام دهد.
- اگر وزن واحد حجم سیال مشخص باشد، توان جریان سیال را می توان محاسبه نمود:

$$\text{Power} = \text{Energy per unit time}$$

$$= \frac{\text{weight}}{\text{unit time}} \times \frac{\text{energy}}{\text{unit weight}}$$

$$\text{Power, } P = \rho g Q \times H$$

$$P = \rho g Q \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z \right) = pQ + \frac{1}{2} \rho v^2 Q + \rho g Q z$$

$$WHP = \frac{\text{power in watt}}{745.7}$$

راندمان

- بدلیل وجود اصطکاک در دستگاه های تبدیل انرژی میزان انرژی داده شده به آنها با میزان انرژی خروجی آنها برابر نیست.
- راندمان یا بازده بصورت نسبت انرژی خروجی از دستگاه به انرژی ورودی به آن تعریف می شود.

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}}$$

- انرژی ورودی به یک پمپ، انرژی الکتریکی یا مکانیکی است که به پمپ داده می شود و انرژی خروجی آن انرژی است که به جریان داده می شود.
- انرژی ورودی به یک توربین، انرژی است که توربین از جریان می گیرد و انرژی خروجی آن انرژی جریان الکتریکی است که از توربین دریافت می شود.

مثال

● جریان آب از مخزن یک سد که تراز آب در آن ۲۴۰m بالاتر از سطح مبنا است، با دبی $0.13 \text{ m}^3/\text{s}$ توسط یک خط لوله به نیروگاه منتقل می‌شود. خروجی لوله، نازلی قرار دارد که در تراز مبنا جت آب را به یک توربین پلتون هدایت می‌کند. اگر سرعت جت خروجی از نازل 66 m/s باشد.

✿ توان جت و مخزن چقدر است؟

✿ انرژی (هد) مورد نیاز برای غلبه بر افت‌های موجود در مسیر را بدست آورید؟

✿ راندمان خط لوله و نازل در انتقال جریان را محاسبه کنید؟

$$\begin{array}{l|l} \text{Reservoir} & \begin{array}{l} p = 0 \\ v = 0 \\ z = 240 \text{ m} \end{array} \\ \text{jet} & \begin{array}{l} p = 0 \\ v = 66 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ z = 0 \end{array} \end{array}$$

مثال

$$\text{power of jet} = \frac{1}{2} \rho v^2 Q = \frac{1}{2} \times 1000 \times 66^2 \times 0.13 = 283140 \text{ W} = 283.14 \text{ kW}$$

$$\text{power of reservoir} = \rho g Q z = 1000 \times 9.81 \times 0.13 \times 240 \text{ W} = 306.072 \text{ kW}$$

$$\begin{aligned} \text{Power lost in transmission} &= \rho g Q h = \text{power of reservoir} - \text{power of jet} \\ &= 306.072 - 283.14 = 22.93 \text{ kW} \end{aligned}$$

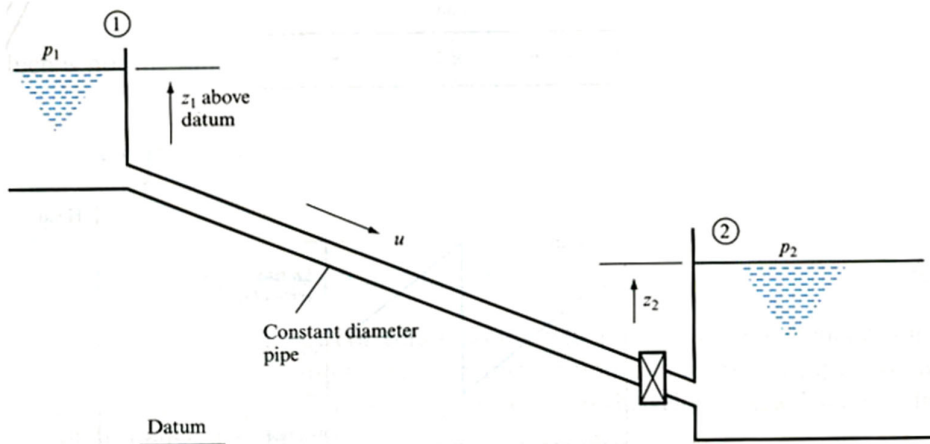
$$\text{Head loss in pipeline} = h = \frac{\text{power lost}}{\rho g Q} = \frac{22.93 \times 10^3}{1000 \times 9.81 \times 0.13} = 17.98 \text{ m}$$

$$\text{Efficiency of transmission} = \frac{\text{power of jet}}{\text{power supplied by reservoir}}$$

$$= \frac{283.14}{306.07} = 0.925 = 92.5\%$$

مثال

توربینی در مسیر خط انتقال بین دو مخزن بزرگ با اختلاف تراز ۶۰m قرار دارد. با صرف نظر از افت انرژی، توان ورودی به توربین را برای دبی عبوری $8 \text{ m}^3/\text{s}$ محاسبه کنید. اگر راندمان توربین ۸۰٪ باشد، انرژی تولیدی در یک شبانه روز چقدر است؟



$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h + w - q$$

$$0 + 0 + 60 = 0 + 0 + 0 + 0 + H_t - 0$$

$$H_t = 60 \text{ m}$$

مثال

$$P_t = \rho g Q H_t = 1000 \times 9.81 \times 8 \times 60 = 4706.88 \text{ kW}$$

$$\eta_t = \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad P_{out} = \eta_t \times P_{in} = \frac{80}{100} \times 4706.88 = 3765.504 \text{ kW}$$

$$E = P_{out} \times t = 3765.504 \times (3600 \times 24) = 325.33 \times 10^3 \text{ kW s} = 325.33 \text{ MJ}$$

$$= 3765.504 \times 24 = 90372 \text{ kWh}$$

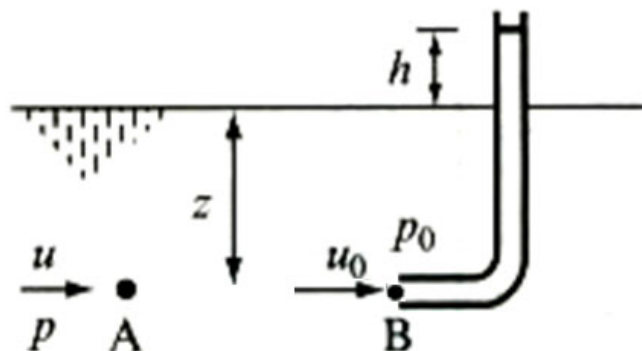
در مثال فوق اگر بجای توربین، از پمپ با دبی $8 \text{ m}^3/\text{s}$ برای انتقال آب از مخزن پایین دست به مخزن بالادست استفاده شود، در صورتی که راندمان پمپ ۷۵٪ باشد،

□ برای انتقال کل آب منتقل شده از مخزن پایین دست به مخزن بالادست در یک شبانه روز چه مقدار انرژی اضافی بر حسب kWh لازم است؟

□ چنانچه کل انرژی دریافت شده، به پمپ داده شود، چه حجمی از آب در مخزن پایین دست باقی می ماند.

لوله پیتوت

- لوله پیتوت برای اندازه‌گیری سرعت جریان در یک نقطه بکار می‌رود.
- این وسیله شامل یک لوله L شکل است که دهانه آن در مقابل جریان قرار می‌گیرد.



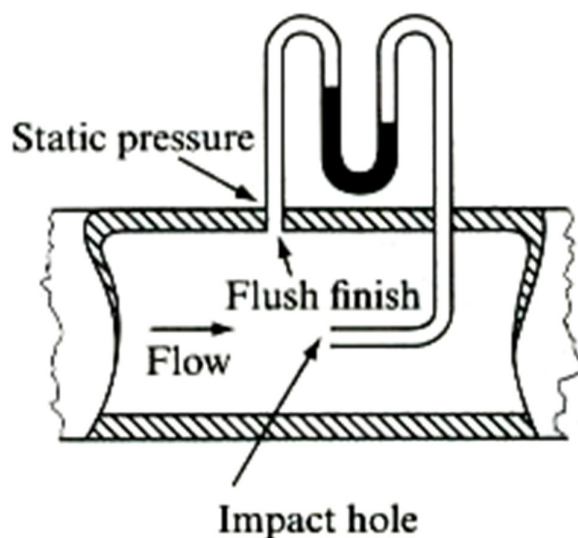
- از معادله برنولی بین نقاط A و B و صرف‌نظر از افت انرژی، داریم:

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B \quad \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g} + \frac{u_0^2}{2g}$$

$$\frac{p}{\rho g} = z, \quad \frac{p_0}{\rho g} = z + h, \quad u_0 = 0 \quad z + \frac{u^2}{2g} = z + h \quad \boxed{u = \sqrt{2gh}}$$

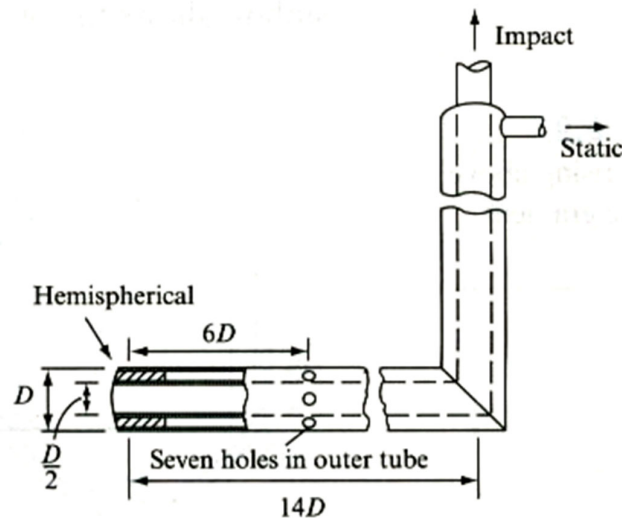
لوله پیتوت

- برای استفاده از لوله پیتوت در کانال‌ها، می‌توان مستقیماً مقدار h را تعیین کرد.
- برای استفاده از لوله پیتوت در یک لوله یا مجرای بسته، می‌توان از یک مانومتر اختلافی برای اندازه‌گیری اختلاف فشار در لوله و فشار در دهانه لوله پیتوت استفاده نمود.



لوله پیتوت

- می‌توان مانومتر اختلافی را بصورت فشرده ساخت و فشار را در دهانه لوله پیتوت و فشار اطراف را اندازه‌گیری نمود.



- برای لوله پیتوت یا هر لوله‌ای که دهانه آن بصورت مماس بر جریان قرار گیرد، فشار در دهانه لوله همان فشار در مجرا می‌باشد و برای لوله‌ای که دهانه آن در راستای عمود بر جریان قرار گیرد، مقدار فشار در دهانه لوله پیتوت $p/\rho g + u^2/2g$ می‌باشد.

معادله انرژی

$$H = \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{\bar{v}^2}{2g} + z$$

Total energy per unit weight at 1	=	Total energy per unit weight at 2	+	Losses per unit weight	+	Work done per unit weight	-	Energy supplied per unit weight
---	---	---	---	------------------------------	---	---------------------------------	---	---------------------------------------

$$\frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\bar{v}_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{\bar{v}_2^2}{2g} + z_2 + h + w - q$$

تغییرات فشار در لوله با تنگ شدگی

لوله‌ای با زاویه ۴۵ درجه نسبت به افق، در طول ۲ متر، از قطر اولیه 200 mm به قطر 100 mm می‌رسد. در لوله روغن با دانسیته نسبی 0.9 از پائین به بالا جریان دارد. اگر سرعت متوسط ورودی 2 m/s باشد و با صرف نظر از افت انرژی:

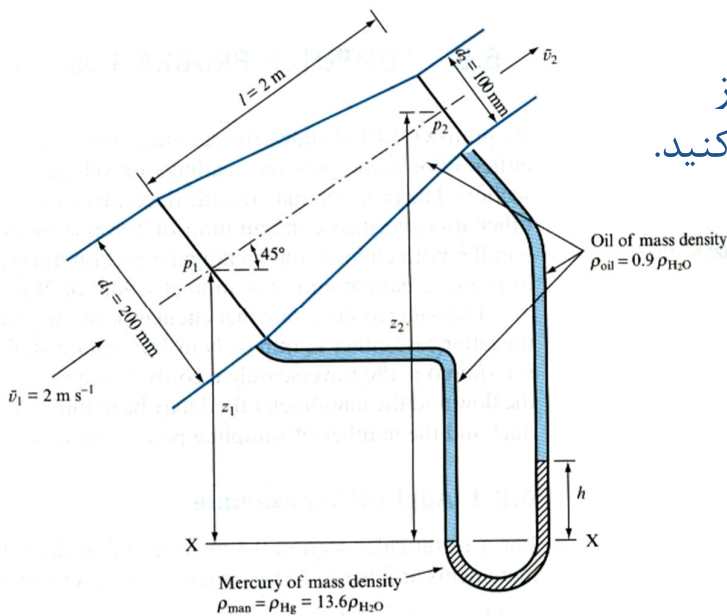
❁ اختلاف فشار را در دو طرف این تنگ‌شدگی محاسبه کنید.

❁ اگر سیال بکاررفته در مانومتر جیوه با دانسیته نسبی 13.6 باشد، اختلاف تراز جیوه در دو ستون مانومتر را محاسبه کنید.

● از پیوستگی:

$$A_1 \bar{v}_1 = A_2 \bar{v}_2 \quad \bar{v}_2 = \frac{A_1}{A_2} \bar{v}_1$$

$$\bar{v}_2 = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 \bar{v}_1 = \left(\frac{200}{100} \right)^2 \times 2 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



تغییرات فشار در لوله با تنگ شدگی

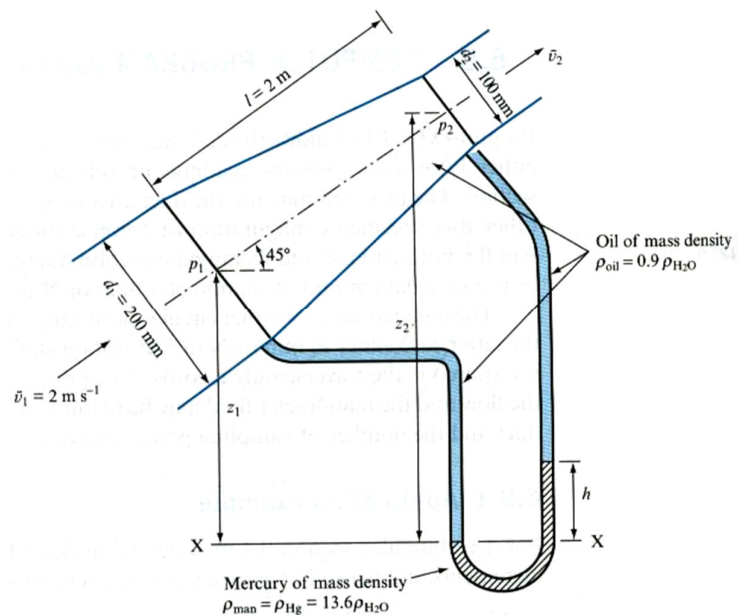
$$\frac{p_1}{\rho_0 g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho_0 g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho_0 g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + z_2 - z_1$$

$$p_1 - p_2 = \rho_0 g \left\{ \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) \right\}$$

$$z_2 - z_1 = l \times \sin 45^\circ = 1.414 \text{ m}$$

$$p_1 - p_2 = 1000 \times 0.9 \times 9.81 \left\{ \frac{8^2 - 2^2}{2 \times 9.81} + 1.414 \right\} = 39485 \text{ pa}$$



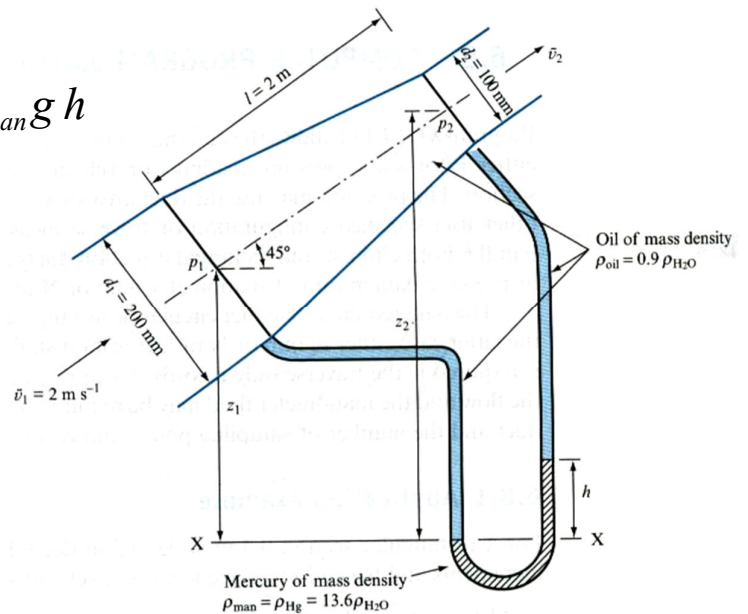
تغییرات فشار در لوله با تنگ شدگی

$$p_1 + \rho_{oil} g z_1 = p_2 + \rho_{oil} g (z_2 - h) + \rho_{man} g h$$

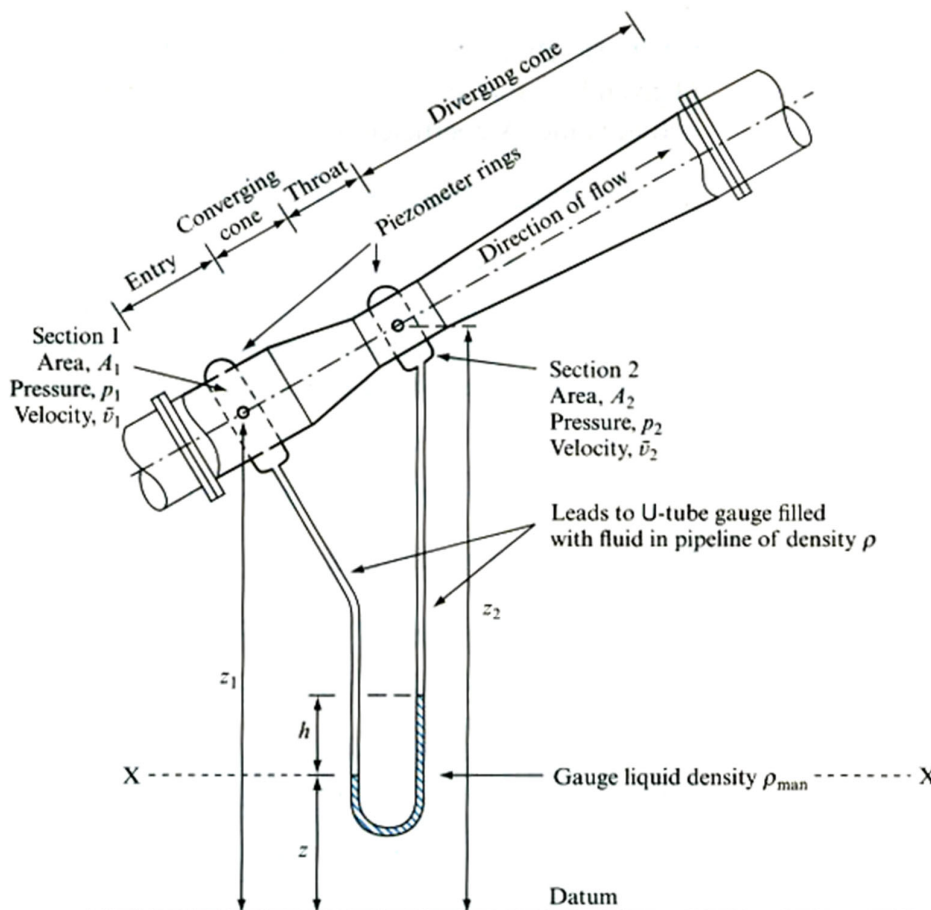
$$\frac{p_1 - p_2}{\rho_{oil} g} + z_1 - z_2 = h \left(\frac{\rho_{man}}{\rho_{oil}} - 1 \right)$$

$$h = \frac{\rho_{oil}}{\rho_{man} - \rho_{oil}} \times \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho_{oil} g} + z_1 - z_2 \right)$$

$$h = \frac{0.9}{13.6 - 0.9} \times \left(\frac{39484}{0.9 \times 1000 \times 9.81} - 1.414 \right) = 0.217 \text{ m}$$



وانتوری متر



در مثال قبل، اختلاف فشار در یک تنگ‌شدگی بصورت تابعی از اختلاف ارتفاع مقاطع و سرعت‌های جریان (تابعی از دبی جریان) محاسبه شد.

مبنای کار وانتوری متر، محاسبه دبی جریان با استفاده از اختلاف فشار در دو مقطع لوله است.

با صرف نظر از افت انرژی، معادله انرژی برای مقطع ورودی و مقطع تنگ شده نوشته می‌شود.

وانتوری متر

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 \right)$$

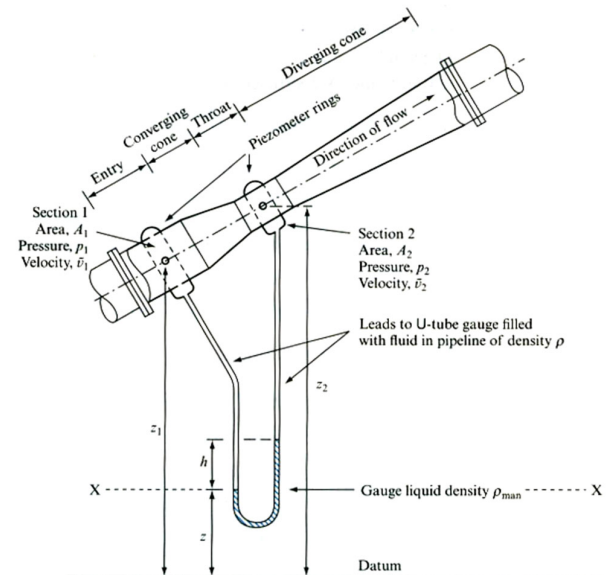
$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

$$v_1^2 \left(\underbrace{\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2}_m - 1 \right) = 2g \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 \right)$$

$$v_1 = \frac{A_2}{(A_1^2 - A_2^2)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{2g \underbrace{\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 \right)}_H}$$

$$Q = A_1 v_1 = \frac{A_1 A_2}{(A_1^2 - A_2^2)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{2gH}$$

$$Q = \frac{A_1}{(m^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{2gH}$$



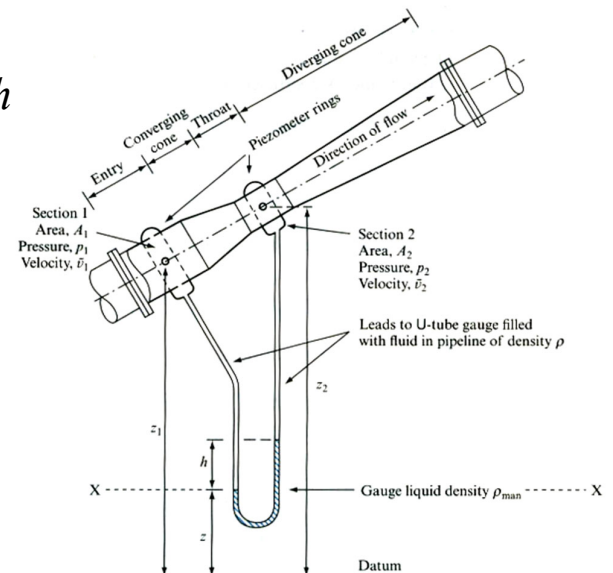
وانتوری متر

$$p_1 + \rho g(z_1 - z) = p_2 + \rho g(z_2 - z - h) + \rho_{man} g h$$

$$H = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + z_1 - z_2 = h \left(\frac{\rho_{man}}{\rho} - 1 \right)$$

$$Q = \frac{A_1}{(m^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{2gh \left(\frac{\rho_{man}}{\rho} - 1 \right)}$$

$$Q_{actual} = C_d \times Q_{theoretical}$$



رابطه بدست آمده مستقل از تراز مقاطع ۱ و ۲ است. اما اگر اختلاف فشار اندازه‌گیری شده باشد، مانند مثال قبل باید تراز مقاطع (شیب وانتوری متر) را هم در محاسبات وارد کرد.

مثال

وانتوری متری با قطر گلوگاه 100 mm در مسیر خط لوله‌ای به قطر 250 mm قرار داده شده است. برای اندازه‌گیری اختلاف فشار بین مقطع اولیه و گلوگاه وانتوری، از یک مانومتر حاوی جیوه با دانسیته نسبی 13.6 استفاده شده است. اگر سیال داخل لوله روغن با دانسیته نسبی 0.9 باشد و لوله‌های مانومتر کاملاً با روغن پر شده باشد، در حالیکه اختلاف تراز سطوح جیوه در مانومتر 0.63 m است، دبی تئوریک عبوری از لوله را محاسبه کنید.

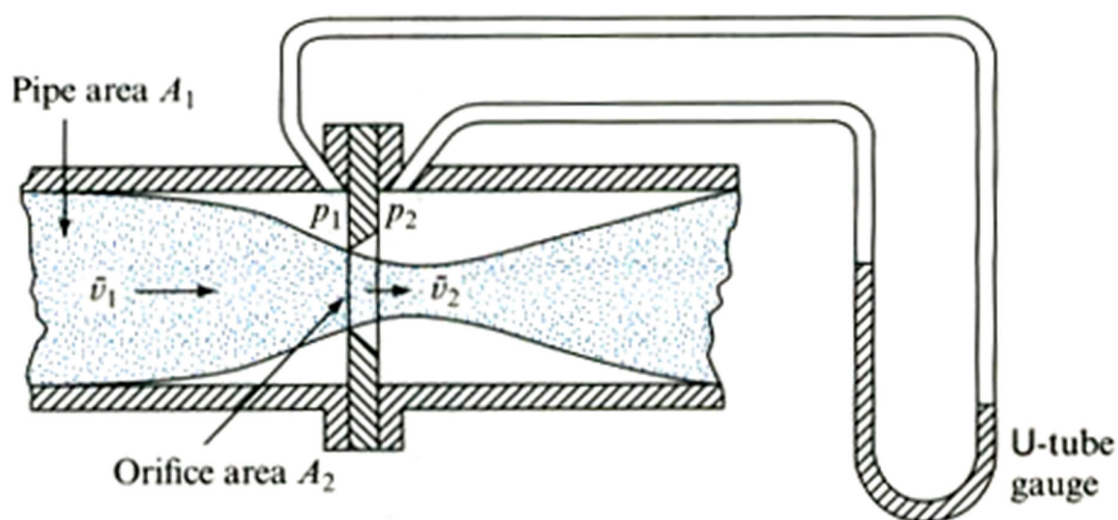
$$A_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2 = \frac{\pi}{4} 0.25^2 = 0.0491 \text{ m}^2$$

$$m = \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 = \left(\frac{250}{100} \right)^2 = 6.25$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{A_1}{(m^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{2gh \left(\frac{\rho_{man}}{\rho} - 1 \right)} \\ &= \frac{0.0491}{(6.25^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.63 \left(\frac{13.6}{0.9} - 1 \right)} \\ &= 0.105 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \end{aligned}$$

Orifices

● مشابه وانتوری متر می‌توان از روزنه نیز با همان شرایط استفاده نمود.

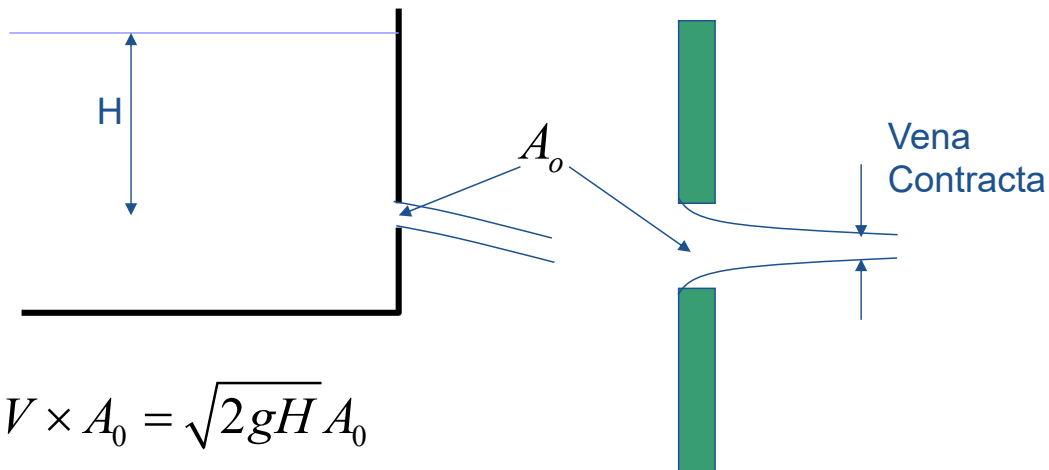


● قطر واقعی جریان در مقطع دوم تقریباً همان قطر روزنه است.

● در روزنه افت انرژی زیاد است و باید حتماً از ضریب دبی (ضریب تخلیه) برای محاسبه دبی واقعی استفاده شود.

● برای روزنه با لبه‌های تیز ضریب تخلیه را معمولاً 0.65 در نظر می‌گیرند.

جریان خروجی از روزنه - جریان غیرماندگار



$$Q_T = V \times A_o = \sqrt{2gH} A_o$$

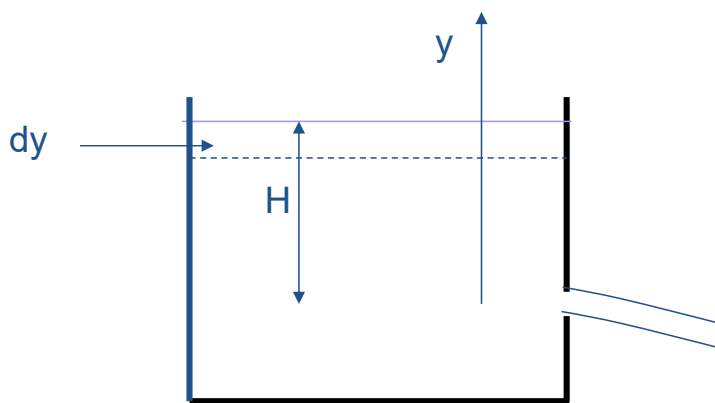
$$Q_{\text{Real}} = V_{\text{Real}} \times A_{\text{VenaContracta}}$$

$$V_{\text{Real}} = C_v \sqrt{2gH}$$

$$A_{\text{VenaContracta}} = C_c A_o$$

$$Q_{\text{Real}} = \underbrace{C_v C_c}_{C_d} A_o \sqrt{2gH} = C_d \underbrace{A_o \sqrt{2gH}}_{Q_T} = C_d Q_T$$

جریان غیرماندگار



$$Q dt = -A_R dy$$

$$dt = \frac{-A_R dy}{Q}$$

$$= \frac{-A_R dy}{C_d A_o \sqrt{2gy}}$$

$$t = \int_0^t dt = \int_{y_1}^{y_2} \frac{-A_R dy}{C_d A_o \sqrt{2gy}}$$

A_R Constant $\Rightarrow t = \frac{2A_R}{C_d A_o \sqrt{2g}} (\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})$

جریان غیرماندگار - مثال

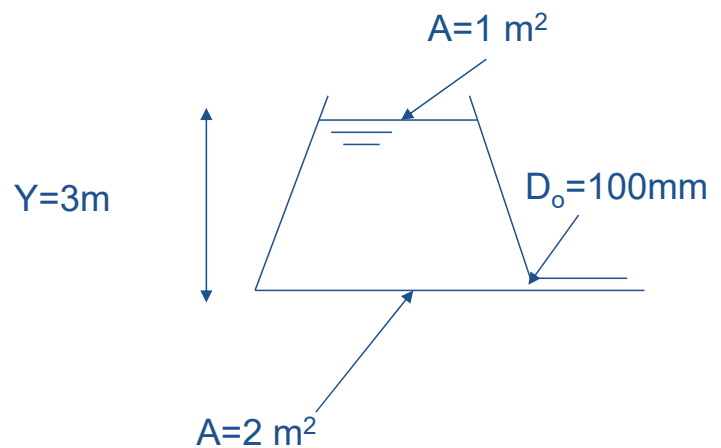
$$C_d = 0.65$$

$$t = ? \text{ for } Y = 2.5\text{m to } Y = 1\text{m}$$

$$t = \int_{y_1}^{y_2} \frac{-A_R dy}{C_d A_o \sqrt{2gy}}$$

$$A_R = 2 - \frac{Y}{3}$$

$$t = \frac{1}{0.65 \times \frac{\pi}{4} (0.1)^2 \sqrt{2 \times 9.81}} \int_{2.5}^1 \left(2 - \frac{Y}{3}\right) Y^{-\frac{1}{2}} dY = 93.8 \text{ seconds}$$



تئوری جریان عبوری از روزنه عریض

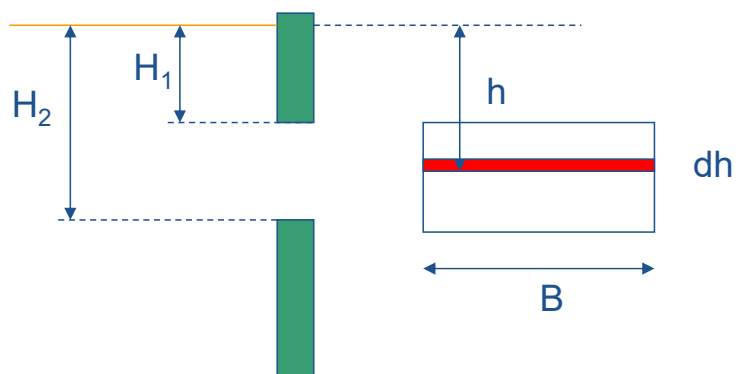
$$dA = B dh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

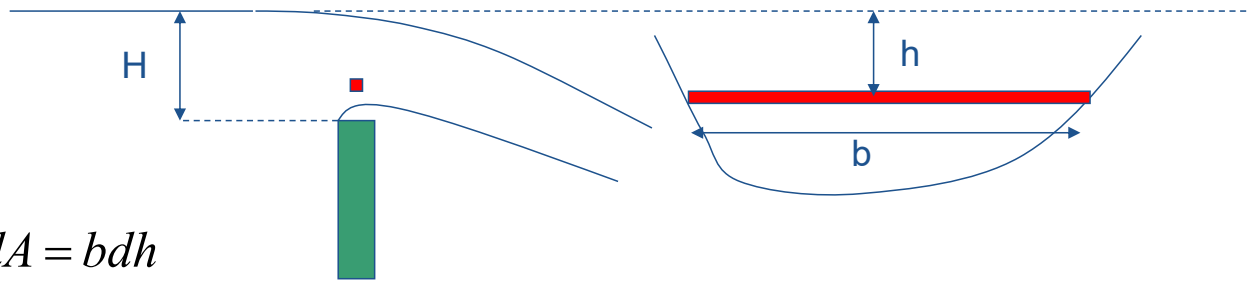
$$dQ = B \sqrt{2g} \cdot h^{\frac{1}{2}} dh$$

$$Q = B \sqrt{2g} \cdot \int_{H_1}^{H_2} h^{\frac{1}{2}} dh$$

$$Q = \frac{2}{3} C_d B \sqrt{2g} (H_2^{\frac{3}{2}} - H_1^{\frac{3}{2}})$$



تئوری جریان عبوری از روزنه عریض - سرریز



$$dA = b dh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

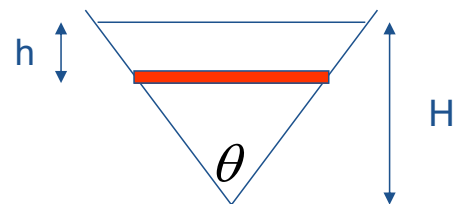
$$dQ = b dh \sqrt{2gh}$$

$$Q = \int_0^H \sqrt{2g} b h^{\frac{1}{2}} dh$$

$$\text{If } b = B \text{ constant} \Rightarrow Q = C_d \frac{2}{3} B \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}}$$

سرریز V شکل

Triangular Weir or V notch

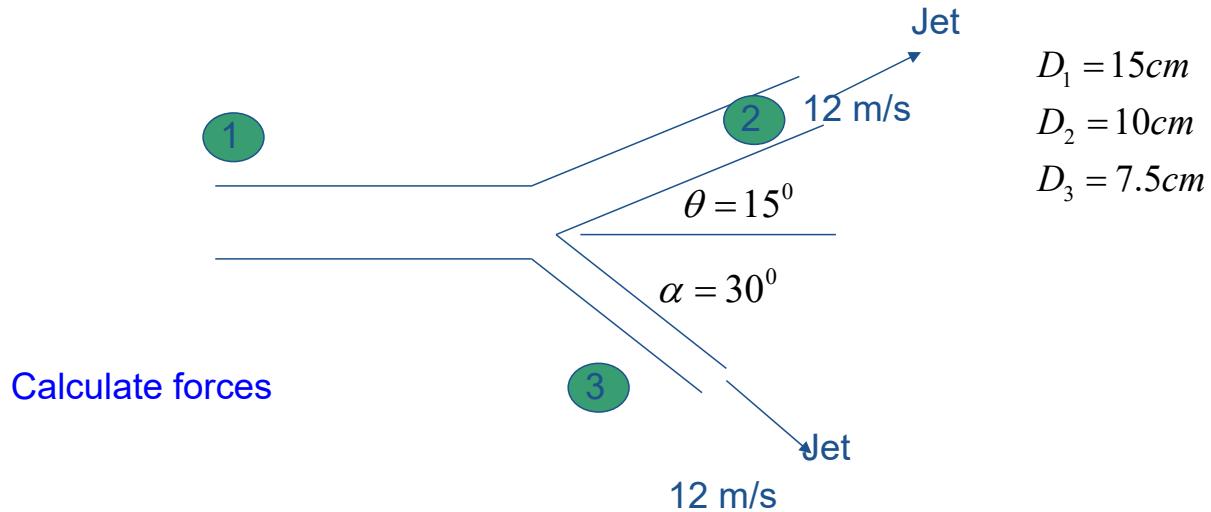


$$b = 2(H - h) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$Q = 2\sqrt{2g} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \int_0^H (H - h) h^{\frac{1}{2}} dh$$

$$Q = \frac{8}{15} C_d \sqrt{2g} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) H^{\frac{5}{2}}$$

معادله انرژی - مثال



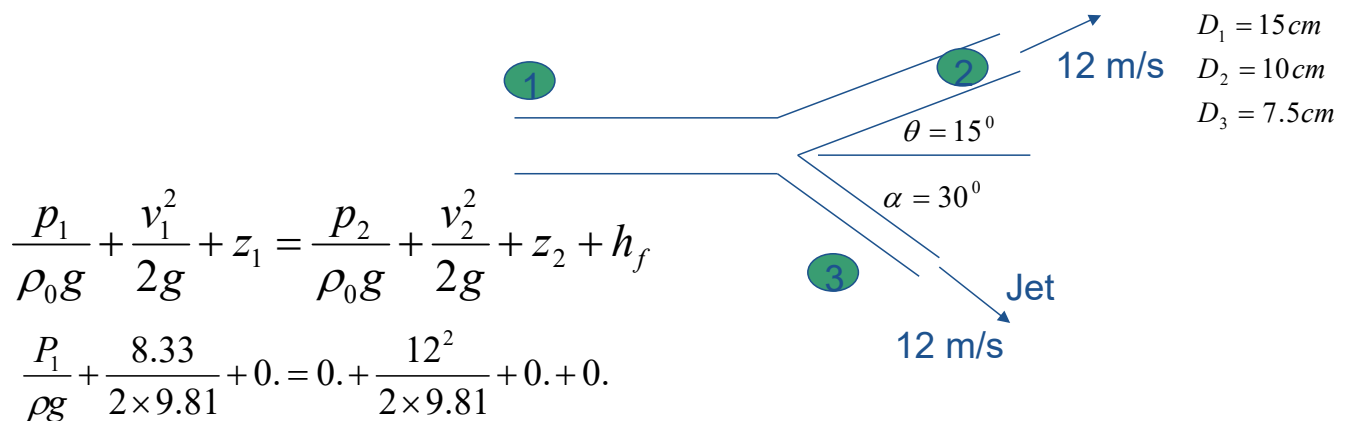
$$A_1 V_1 = A_2 V_2 + A_3 V_3 \quad \longrightarrow \quad V_1 = 8.33 \text{ m/s}$$

$$Q_1 = A_1 V_1 = 0.147 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = 0.094 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_3 = 0.053 \text{ m}^3/\text{s}$$

معادله انرژی - مثال



$$\frac{p_1}{\rho_0 g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho_0 g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_f$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{8.33}{2 \times 9.81} + 0 = 0 + \frac{12^2}{2 \times 9.81} + 0 + 0$$

$$P_1 = 37.3 \text{ KN/m}^2$$

$$\Sigma F_x = P_1 A_1 + F_x = (\rho Q_2 V_2 \cos \theta + \rho Q_3 V_3 \cos \alpha) - \rho Q_1 V_1$$

$$\longleftarrow F_x = -0.242 \text{ KN} \quad R_x = 0.242 \text{ KN} \quad \longrightarrow$$

$$\Sigma F_y = F_y = [\rho Q_2 V_2 \sin \theta + \rho Q_3 (-V_3 \sin \alpha)] - \rho Q_1 \times 0$$

$$F_y = -0.027 \text{ KN} \quad R_y = 0.027 \text{ KN}$$