

مکانیک سیالات

معادله اولر معادله برنولی

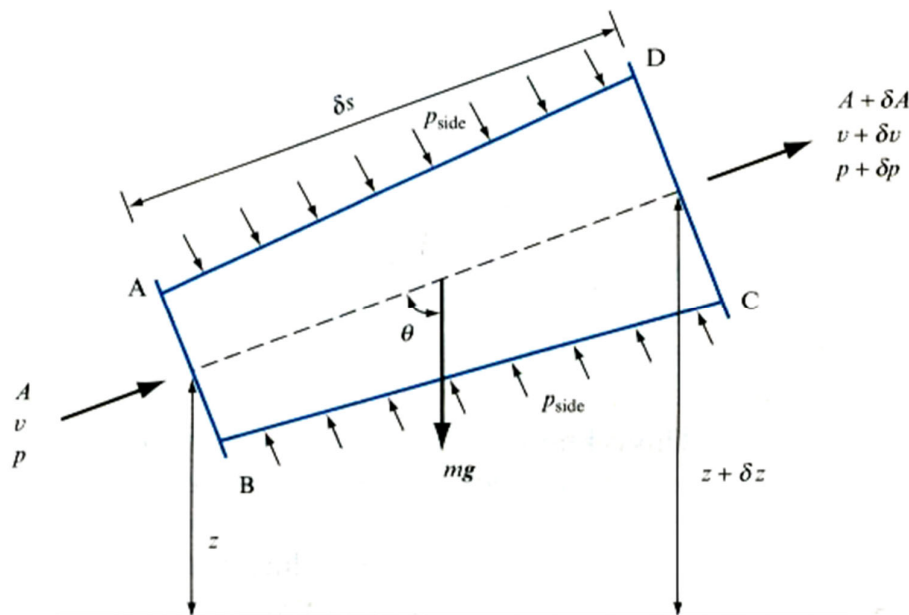
www.hadian.ir



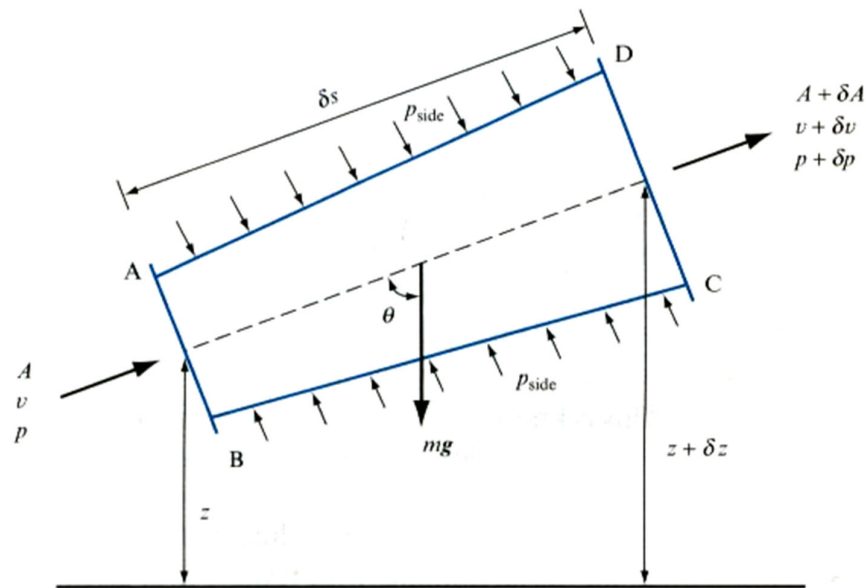
محمد رضا هادیان
دانشگاه یزد – دانشکده مهندسی عمران

معادله اولر

- می توان معادله ممتموم را برای یک المان از یک خط جریان بکار برد.
- یک خط جریان را در نظر می گیریم و قسمتی از لوله جریان را به عنوان حجم کنترل در نظر می گیریم.
- مقطع این لوله جریان به اندازه کافی کوچک است که می توان سرعت را در مقطع لوله جریان ثابت فرض کرد.



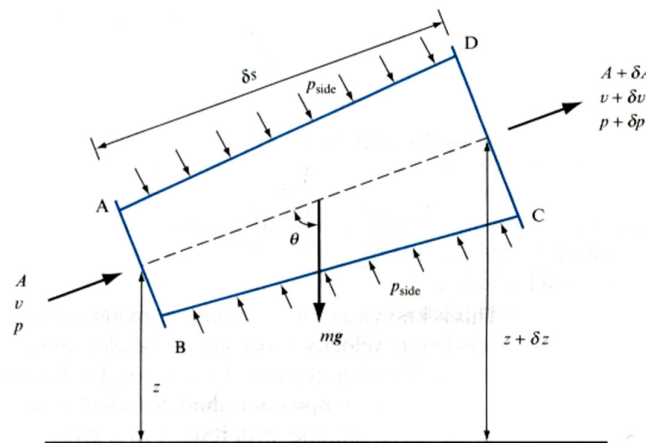
معادله اولر



Mass per unit time flowing = $\rho A v$

Rare of increase of momentum from AB to CD = $\rho A v [(v + \delta v) - v]$
 $= \rho A v \delta v$

معادله اولر



Force due to p in direction of motion = pA

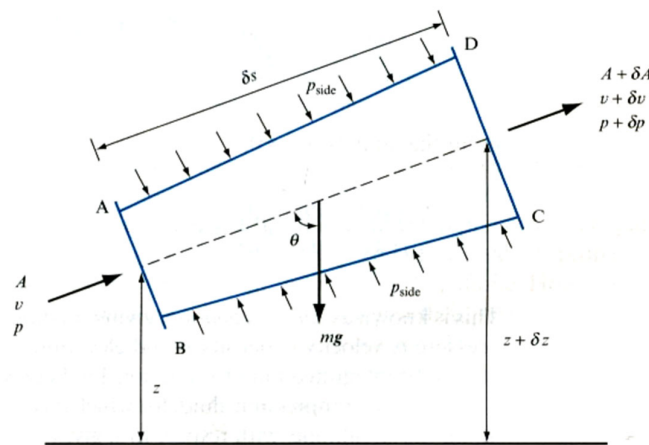
Force due to $p + \delta p$ opposing motion = $(p + \delta p)(A + \delta A)$

Force due to p_{side} producing a component in the direction of motion = $p_{side} \delta A$

Force due to mg producing a component opposing motion = $mg \cos \theta$

Resultant force in the direction of motion = $pA - (p + \delta p)(A + \delta A)$
 $+ p_{side} \delta A - mg \cos \theta$

معادله اولر



فشار جانبی از p در مقطع AB تا $p + \delta p$ در مقطع CD متغیر است و می توان آن را بصورت $p + k\delta p$ در نظر گرفت که k یک ضریب است.

$$\text{Weight of element, } mg = \rho g \times \text{Volume} = \rho g \times \left(A + \frac{1}{2} \delta A \right) \delta s \quad \cos \theta = \frac{\delta z}{\delta s}$$

$$\begin{aligned} \text{Resultant force in the direction of motion} = & -p\delta A - A\delta p - \cancel{\delta p\delta A} + \cancel{p\delta A} \\ & + \cancel{k\delta p\delta A} - \rho g \left(A + \cancel{\frac{1}{2}\delta A} \right) \delta s \frac{\delta z}{\delta s} \end{aligned}$$

معادله اولر

$$\text{Resultant force in the direction of motion} = -A\delta p - \rho g A \delta z$$

با استفاده از قانون دوم نیوتن و برابری برآیند نیروهای خارجی در امتداد جریان با تغییرات ممنتوم در واحد زمان.

$$\rho A v \delta v = -A\delta p - \rho g A \delta z$$

تقسیم بر $\rho A \delta s$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta s} + v \frac{\delta v}{\delta s} + g \frac{\delta z}{\delta s} = 0$$

وقتی δs به سمت صفر میل کند:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + v \frac{dv}{ds} + g \frac{dz}{ds} = 0}$$

معادله فوق به معادله اولر مشهور است و بصورت دیفرانسیلی ارتباط بین فشار، سرعت، جرم حجمی و ارتفاع را بیان می کند.

معادله برنولی

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + v \frac{dv}{ds} + g \frac{dz}{ds} = 0$$

- برای انتگرال گیری از رابطه اولر باید ارتباط بین فشار و جرم حجمی معلوم باشد.
- برای سیال غیرقابل تراکم، دانسیته ثابت است و می توان از رابطه اولر در امتداد خط جریان، انتگرال گیری کرد:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{constant}$$

- ترم های رابطه فوق انرژی در واحد جرم سیال هستند. با تقسیم رابطه بر g :

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{constant} = H$$

- ترم های رابطه اخیر انرژی در واحد وزن سیال بوده و از جنس طول هستند.
- رابطه فوق به رابطه **برنولی** معروف است و ارتباط فشار، سرعت و ارتفاع را برای جریان ماندگار در سیال بدون اصطکاک با دانسیته ثابت بیان می کند.

معادله برنولی

- رابطه قبل را می توان در ρg ضرب نمود (فرم دیگر رابطه برنولی):

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{constant}$$

- ترم های این رابطه انرژی در واحد حجم سیال هستند.
- معادله برنولی را می توان برای یک خط جریان بکار برد و جمع سه ترم برای در یک خط جریان ثابت است. اما مقدار آن برای هر خط جریان با خط جریان دیگر فرق دارد.
- اگر انتگرال گیری از معادله اولر را روی خط جریان بین نقاط ۱ و ۲ انجام دهیم:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$