

مکانیک سیالات

معادله ممنتوم

www.hadian.ir



محمد رضا هادیان
دانشگاه یزد – دانشکده مهندسی عمران

معادله ممنتوم

● در مکانیک، ممنتوم یک ذره بصورت حاصل ضرب جرم ذره در سرعت آن تعریف می شود.

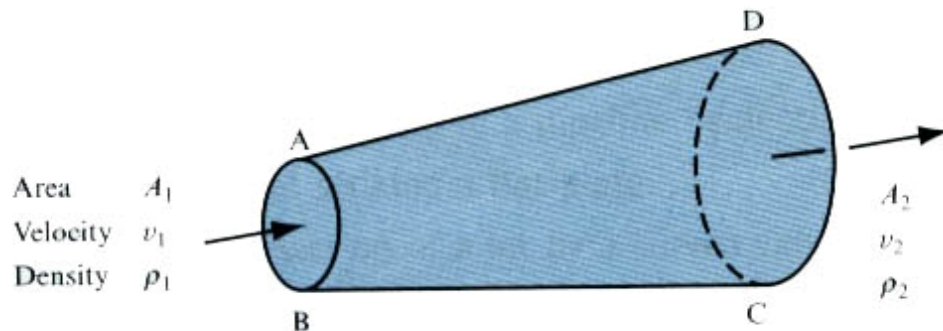
$$\text{Momentum} = mv$$

● طبق قانون دوم نیوتن، تغییرات ممنتوم در واحد زمان، برابر با نیروی وارد به جسم می باشد. (ممنتوم و نیرو هر دو از جنس بردار هستند).

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

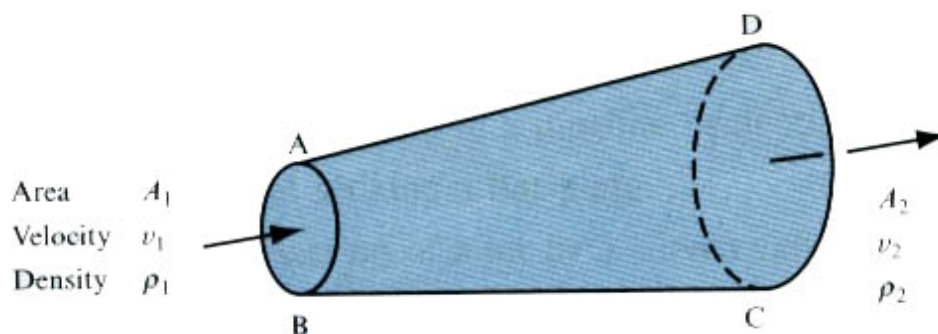
معادله ممنتوم

- چنانچه سیال را در حالت ماندگار غیریکنواخت در نظر بگیریم، برای حجم کنترل فرضی شکل زیر داریم:



- رابطه پیوستگی: $\rho_2 A_2 v_2 = \rho_1 A_1 v_1 = \dot{m}$
- نرخ ممنتوم خروجی از مرز CD: $\rho_2 A_2 v_2 v_2$
- نرخ ممنتوم ورودی از مرز AB: $\rho_1 A_1 v_1 v_1$
- تغییرات ممنتوم حجم کنترل: $\rho_2 A_2 v_2 v_2 - \rho_1 A_1 v_1 v_1$
- با در نظر گرفتن رابطه پیوستگی: $\rho_1 A_1 v_1 (v_2 - v_1) = \dot{m}(v_2 - v_1)$
- = Mass flow per unit time $\times$ change of velocity

معادله ممنتوم



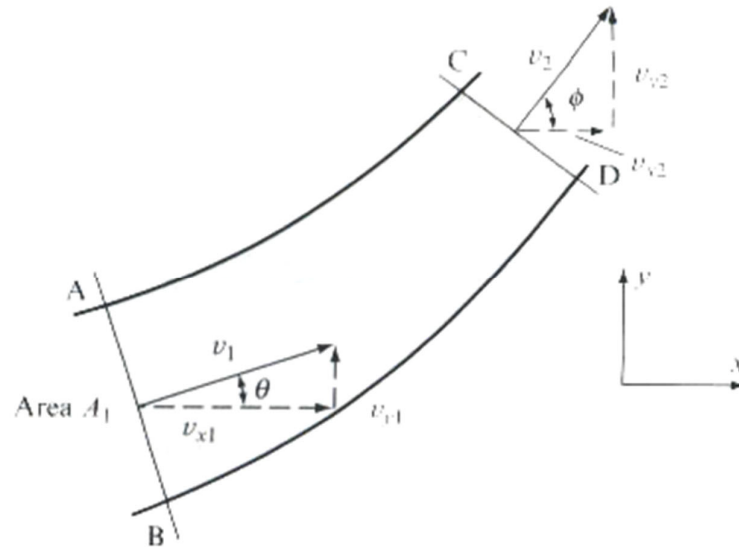
- با استفاده از قانون دوم نیوتن:

$$\vec{F} = \dot{m}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

- نیروی $\vec{F}$ و $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ هر دو از جنس بردار بوده و هم راست و هم جهت هستند.
- نیروی فوق به سیال درون حجم کنترل وارد می شود. با توجه به قانون سوم نیوتن، عکس العمل این نیرو از طرف سیال به محیط اطراف وارد می شود.

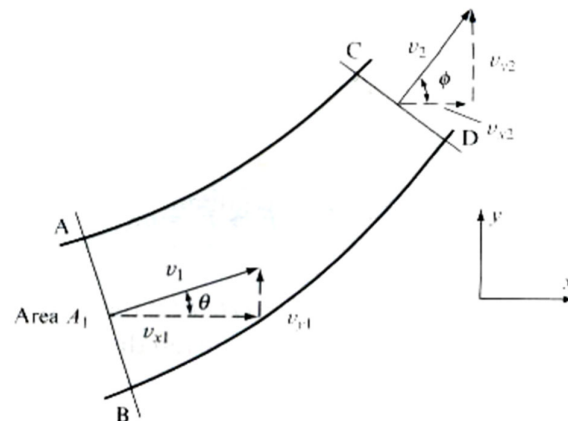
معادله ممتوم در حالت دوبعدی و سه بعدی

● در حالت کلی که بردارهای سرعت ورودی و خروجی هم راستا نیستند:



$$\begin{aligned}
 F_x &= \text{Rate of change of momentum of fluid in x direction} \\
 &= \text{Mass per unit time} \times \text{change of velocity in x direction} \\
 &= \dot{m}(v_2 \cos \phi - v_1 \cos \theta) = \dot{m}(v_{2x} - v_{1x})
 \end{aligned}$$

معادله ممتوم در حالت دوبعدی و سه بعدی



$$F_x = \dot{m}(v_2 \cos \phi - v_1 \cos \theta) = \dot{m}(v_{2x} - v_{1x})$$

$$F_y = \dot{m}(v_2 \sin \phi - v_1 \sin \theta) = \dot{m}(v_{2y} - v_{1y})$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

● بطور کلی:

$$F_i = \dot{m}(v_{out} - v_{in})_i$$

معادله ممنتوم در حالت دوبعدی و سه بعدی

● اگر دانسیته سیال در ورودی و خروجی یکسان باشد:

$$\vec{F} = \dot{m}(\vec{v}_{out} - \vec{v}_{in}) = \rho Q(\vec{v}_{out} - \vec{v}_{in})$$

● اگر حجم کنترل دارای چندین ورودی و خروجی باشد (برای سیال با دانسیته ثابت) و نیروهای مختلفی بر آن موثر باشد (مرزها، سیالات دیگر، وزن و ...):

$$\sum \vec{F} = \left(\sum \rho Q \vec{v} \right)_{out} - \left(\sum \rho Q \vec{v} \right)_{in}$$

ضریب تصحیح ممنتوم

$$\sum \vec{F} = \left(\sum \rho Q \vec{v} \right)_{out} - \left(\sum \rho Q \vec{v} \right)_{in}$$

● در معادله ممنتوم فرض بر این بود که سرعت در مقاطع ورودی و خروجی ثابت است.

● در سیال واقعی که تنش برشی در لایه‌های سیال توسعه می‌یابد و بدلیل وجود مرزهای جامد، جریان در مقاطع ورودی و خروجی یکنواخت نیست.

● مقدار ممنتوم ورودی یا خروجی از مقاطع را می‌توان با داشتن توزیع سرعت در هر مقطع و استفاده از انتگرال‌گیری بدست آورد.

ضریب تصحیح ممنتوم

جرم عبوری از المان در واحد زمان: $\rho \delta A \times u$

ممنتوم عبوری از المان در واحد زمان = جرم عبوری در واحد زمان $\times$ سرعت

$$\rho \delta A \times u \times u =$$

$$\rho u^2 \delta A =$$

$$\text{Total momentum per unit time} = \int \rho u^2 dA$$

● برای محاسبه انتگرال فوق داشتن توزیع سرعت در مقطع ضروری است.

● معمولاً در مسائل مهندسی با سرعت متوسط کار می‌کنیم. اگر بخواهیم ممنتوم را با استفاده از سرعت متوسط بدست آوریم باید از یک ضریب تصحیح استفاده کنیم.

$$\text{Total momentum per unit time} = \beta \rho \bar{u}^2 A$$

ضریب تصحیح ممنتوم

$$\beta \rho \bar{u}^2 A = \int \rho u^2 dA$$

$$\beta = \frac{\int \rho u^2 dA}{\rho \bar{u}^2 A}$$

$$\beta = \frac{\int u^2 dA}{\bar{u}^2 A}$$

$$\beta = \frac{1}{A} \int \left(\frac{u}{\bar{u}} \right)^2 dA$$

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{\int u dA}{A}$$

در صورتی که مقدار β داده نشده باشد و توزیع سرعت هم معلوم نباشد، برای سادگی کار β را برابر با واحد در نظر می‌گیریم.

مثال

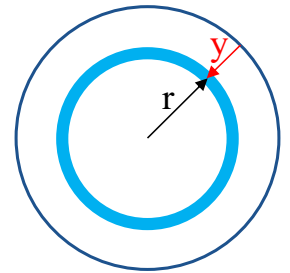
برای یک لوله با جریان آشفته، توزیع سرعت در مقطع از رابطه توانی زیر تبعیت می‌نماید. برای این جریان، سرعت متوسط، ممثوم عبوری در واحد زمان و ضریب تصحیح ممثوم را محاسبه کنید.

$$u = u_{\max} \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{7}}$$

سرعت تنها تابع فاصله از مرز جامد است بنابراین از المان حلقوی استفاده می‌نماییم.

$$dA = 2\pi r dr$$

$$\bar{u} = \frac{\int u dA}{A} = \frac{1}{\pi R^2} \int u_{\max} \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{7}} dA$$



$$\bar{u} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u_{\max} \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{1}{7}} 2\pi r dr = \frac{2\pi u_{\max}}{\pi R^2 R^{\frac{1}{7}}} \int_0^R y^{\frac{1}{7}} r dr$$

مثال

$$\bar{u} = \frac{2u_{\max}}{R^{\frac{15}{7}}} \int_0^R y^{\frac{1}{7}} r dr \quad \begin{matrix} r = R - y \\ dr = -dy \end{matrix} \quad \bar{u} = \frac{2u_{\max}}{R^{\frac{15}{7}}} \int_R^0 y^{\frac{1}{7}} (R - y) (-dy)$$

$$\bar{u} = \frac{2u_{\max}}{R^{\frac{15}{7}}} \int_R^0 \left(y^{\frac{8}{7}} - Ry^{\frac{1}{7}} \right) dy = \frac{2u_{\max}}{R^{\frac{15}{7}}} \left[\frac{7}{15} y^{\frac{15}{7}} - \frac{7}{8} Ry^{\frac{8}{7}} \right]_R^0$$

$$\bar{u} = \frac{49}{60} u_{\max}$$

مثال

$$\begin{aligned}
 \text{Total momentum per unit time} &= \int \rho u^2 dA = \int_0^R \rho u_{\max}^2 \left(\frac{y}{R} \right)^{\frac{2}{7}} 2\pi r dr \\
 &= \frac{2\pi \rho}{R^{\frac{2}{7}}} u_{\max}^2 \int_0^R y^{\frac{2}{7}} r dr = \frac{2\pi \rho}{R^{\frac{2}{7}}} u_{\max}^2 \int_R^0 y^{\frac{2}{7}} (R-y)(-dy) \\
 &= \frac{2\pi \rho}{R^{\frac{2}{7}}} u_{\max}^2 \int_R^0 \left(y^{\frac{9}{7}} - Ry^{\frac{2}{7}} \right) dy = \frac{2\pi \rho}{R^{\frac{2}{7}}} u_{\max}^2 \left[\frac{7}{16} y^{\frac{16}{7}} - \frac{7}{9} Ry^{\frac{9}{7}} \right]_R^0 \\
 \text{Total momentum per unit time} &= \frac{49}{72} \pi \rho R^2 u_{\max}^2
 \end{aligned}$$

مثال

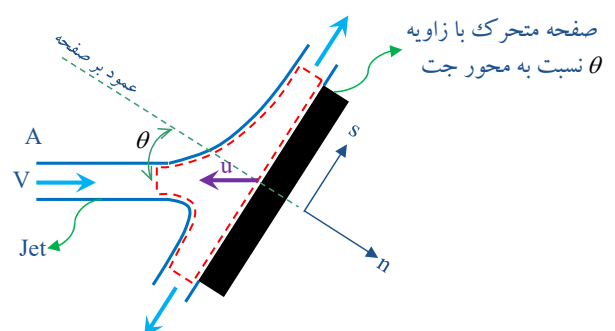
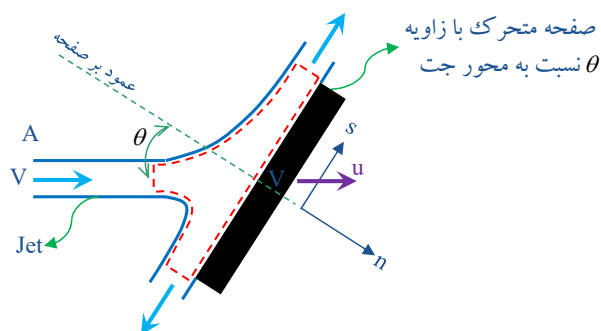
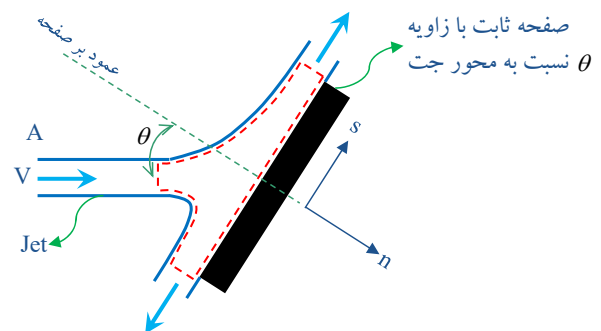
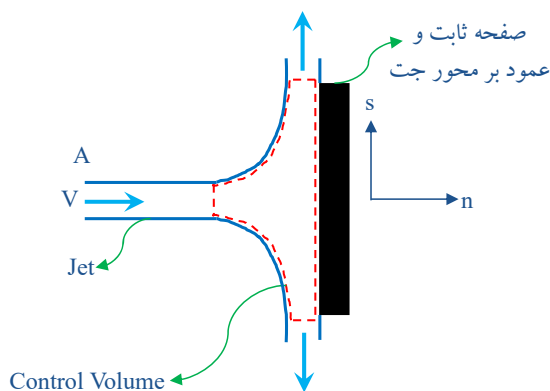
$$\begin{aligned}
 \beta &= \frac{\text{Total momentum per unit time}}{\rho \bar{u}^2 A} \\
 &= \frac{\frac{49}{72} \pi \rho R^2 u_{\max}^2}{\rho \left(\frac{49}{60} u_{\max} \right)^2 \pi R^2} \\
 &= \frac{3600}{3528} = \frac{50}{49} \\
 \beta &= 1.02
 \end{aligned}$$

برخورد جت جریان با یک صفحه صاف

● جت سیالی را در نظر بگیرید که با صفحه صاف برخورد می‌کند.

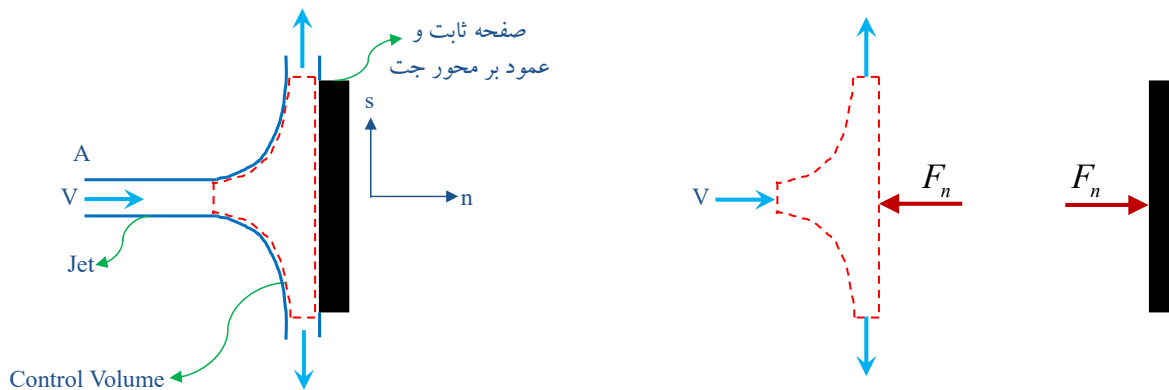
- ✱ صفحه می‌تواند قائم باشد یا بصورت مایل قرار گرفته باشد.
- ✱ ممکن است صفحه ثابت باشد و یا اینکه با سرعتی در حال حرکت باشد.
- ✱ حجم کنترل را در محل برخورد جت با صفحه قرار می‌دهیم.
- ✱ در صورتیکه صفحه در حال حرکت است، حجم کنترل را هم همراه با صفحه حرکت می‌دهیم. مسئله را از دید ناظری که همراه با صفحه حرکت می‌کند بررسی می‌کنیم.
- ✱ برای راحتی کار بهتر است که محورها را در امتداد مماس بر صفحه و عمود بر صفحه در نظر بگیریم.

برخورد جت جریان با یک صفحه صاف



برخورد جت جریان با یک صفحه صاف

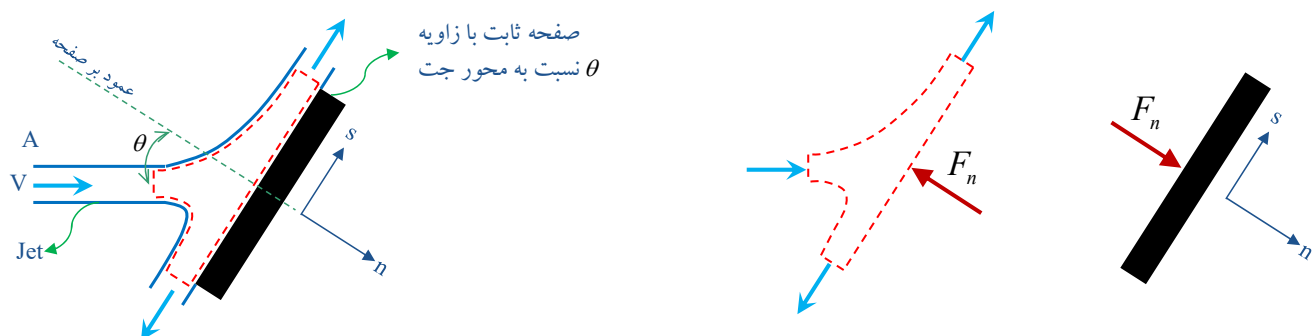
● برای صفحه ثابت که جت عمود بر صفحه به آن برخورد کند، با فرض نیروی وارد بر حجم کنترل به سمت چپ:



$$-F_n = \rho AV(0 - V) = -\rho AV^2 \rightarrow F_n = \rho AV^2$$

برخورد جت جریان با یک صفحه صاف

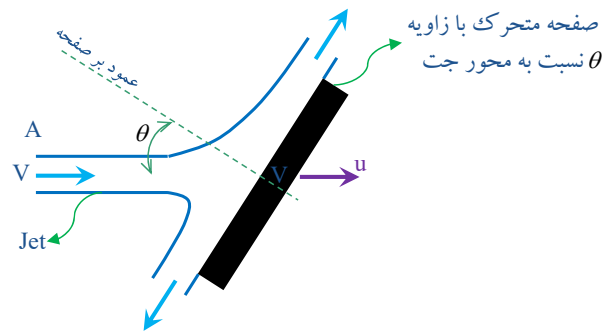
● اگر صفحه ثابت باشد اما بر امتداد جت عمود نباشد، با فرض نیروی وارد بر حجم کنترل از سمت صفحه:



$$-F = \rho AV(0 - V \cos \theta) = -\rho AV^2 \cos \theta \rightarrow F = \rho AV^2 \cos \theta$$

برخورد جت جریان با یک صفحه صاف

● برای صفحه متحرک، با فرض نیروی وارد بر حجم کنترل از سمت صفحه:

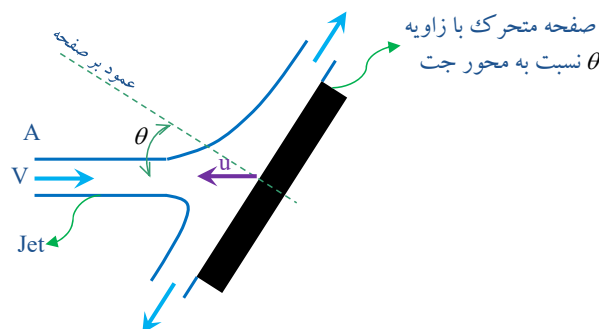


$$-F = \rho A(V - u)[0 - (V - u)] \cos \theta = -\rho A(V - u)^2 \cos \theta$$

$$F = \rho A(V - u)^2 \cos \theta$$

برخورد جت جریان با یک صفحه صاف

● برای صفحه متحرک، با فرض نیروی وارد بر حجم کنترل از سمت صفحه:



$$-F = \rho A(V + u)[0 - (V + u)] \cos \theta = -\rho A(V + u)^2 \cos \theta$$

$$F = \rho A(V + u)^2 \cos \theta$$

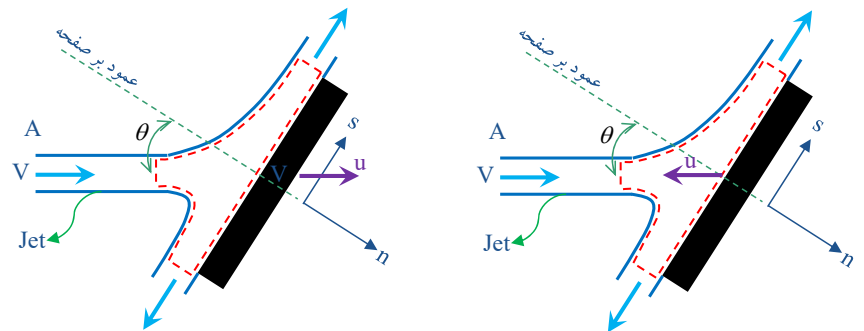
مثال

● جت آب از نازل ثابتی به قطر ۲۵ mm خارج شده و به صفحه صافی که بصورت مورب نسبت به جت قرار دارد، برخورد می‌کند. سرعت جت ۵ m/s بوده و سطح صفحه بصورت بدون اصطکاک فرض می‌شود.

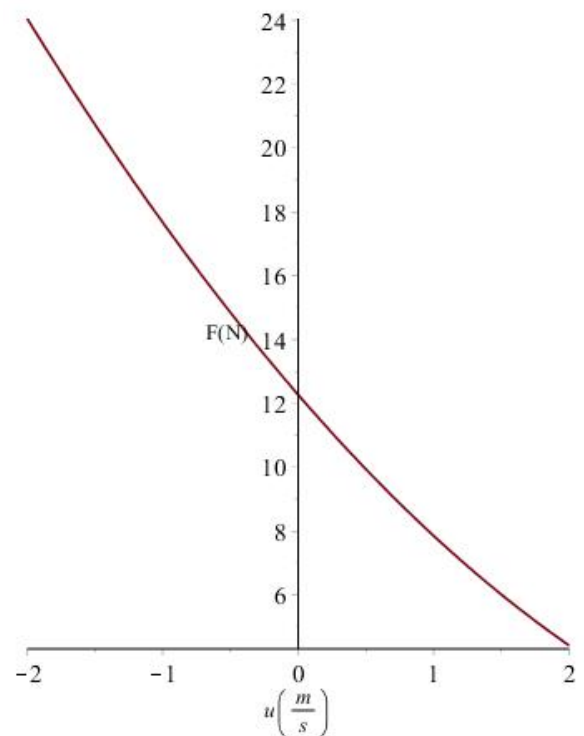
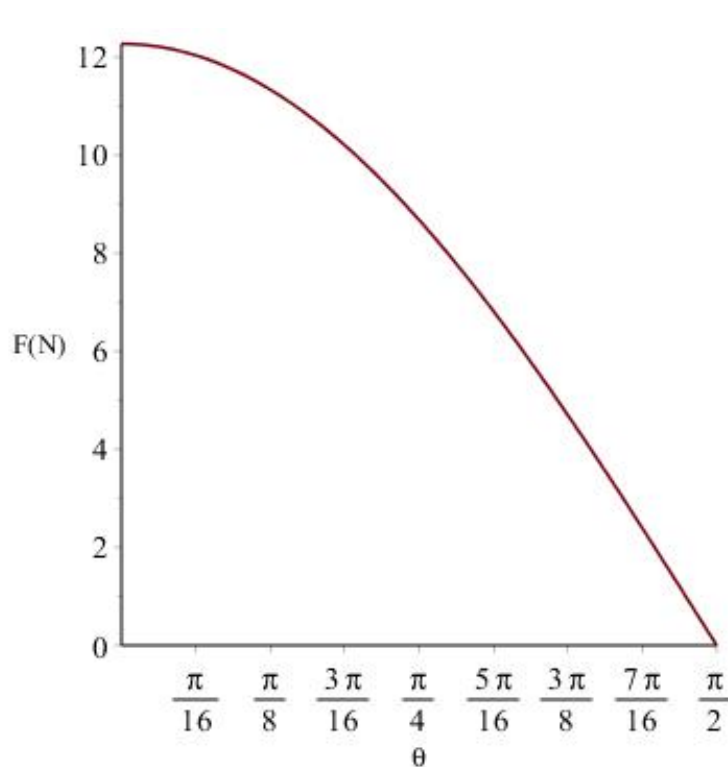
✿ تغییرات نیروی وارد بر صفحه را برای صفحه ثابت به ازاء زاویه‌های بین صفر تا ۹۰ درجه محاسبه نمایید.

✿ تغییرات نیروی وارد بر صفحه را برای صفحه قائم به ازاء سرعت صفحه بین ۲ m/s تا -۲ m/s چقدر است؟

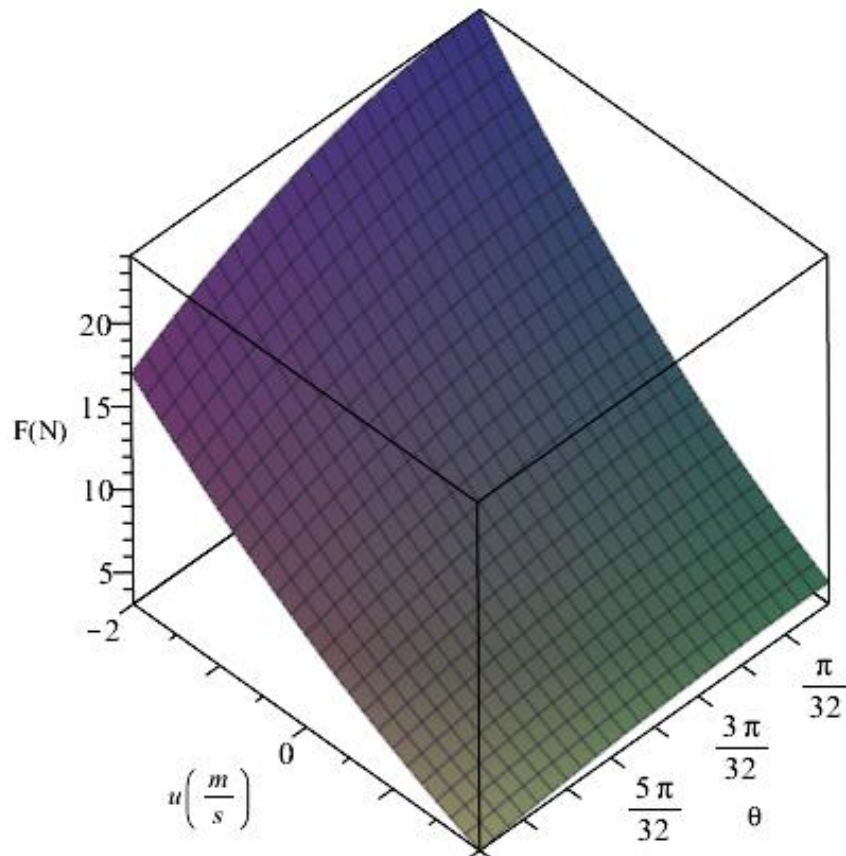
$$F = \rho A (V - u)^2 \cos \theta$$



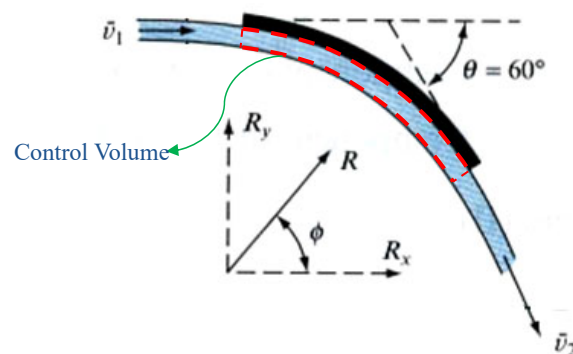
مثال



مثال



نیروی ناشی از تغییر جهت جت در برخورد با صفحه



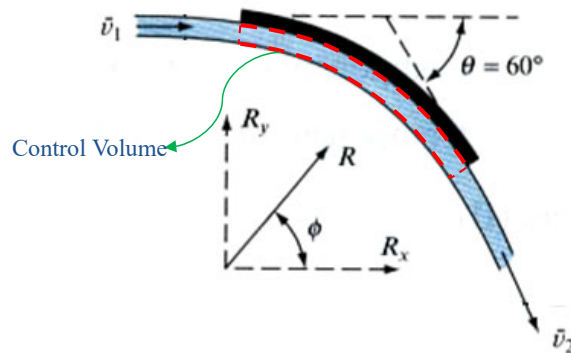
● جت آب خروجی از یک نازل، توسط صفحه خمیده‌ای به اندازه ۶۰ درجه منحرف می‌شود. جریان با سرعت ۳۰ m/s بصورت مماس با صفحه وارد آن می‌شود و با سرعت ۲۵ m/s از روی صفحه خارج می‌شود. اگر دبی جرمی جریان ۰/۸ Kg/s باشد، بزرگی و جهت نیروی منتجه وارد بر صفحه ثابت را بدست آورید.

$$\sum \vec{F} = \left(\sum \rho Q \vec{v} \right)_{out} - \left(\sum \rho Q \vec{v} \right)_{in}$$

● مطابق شکل R_x و R_y را نیروهای وارد بر صفحه در نظر می‌گیریم

نیروهای وارد بر حجم کنترل در خلاف جهت این نیروها هستند.

نیروی ناشی از تغییر جهت جت در برخورد با صفحه



$$-R_x = \rho Q (\vec{v}_{out} - \vec{v}_{in})_x = \dot{m} (\vec{v}_{x,out} - \vec{v}_{x,in})$$

$$= \dot{m} (\bar{v}_2 \cos \theta - \bar{v}_1)$$

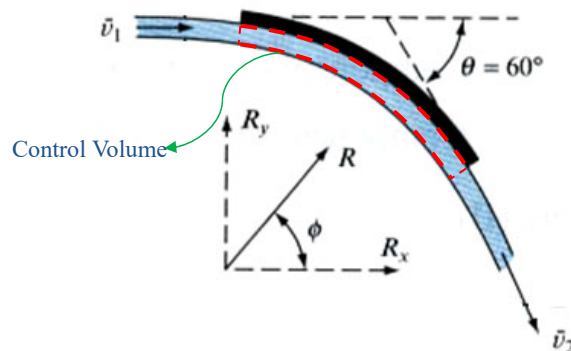
$$= 0.8 \times (25 \times \cos 60^\circ - 30) = -14 \text{ N} \quad \longrightarrow \quad R_x = 14 \text{ N}$$

$$-R_y = \rho Q (\vec{v}_{out} - \vec{v}_{in})_y = \dot{m} (\vec{v}_{y,out} - \vec{v}_{y,in})$$

$$= \dot{m} (-\bar{v}_2 \sin \theta - 0)$$

$$= 0.8 \times (-25 \times \sin 60^\circ) = -17.32 \text{ N} \quad \longrightarrow \quad R_y = 17.32 \text{ N}$$

نیروی ناشی از تغییر جهت جت در برخورد با صفحه



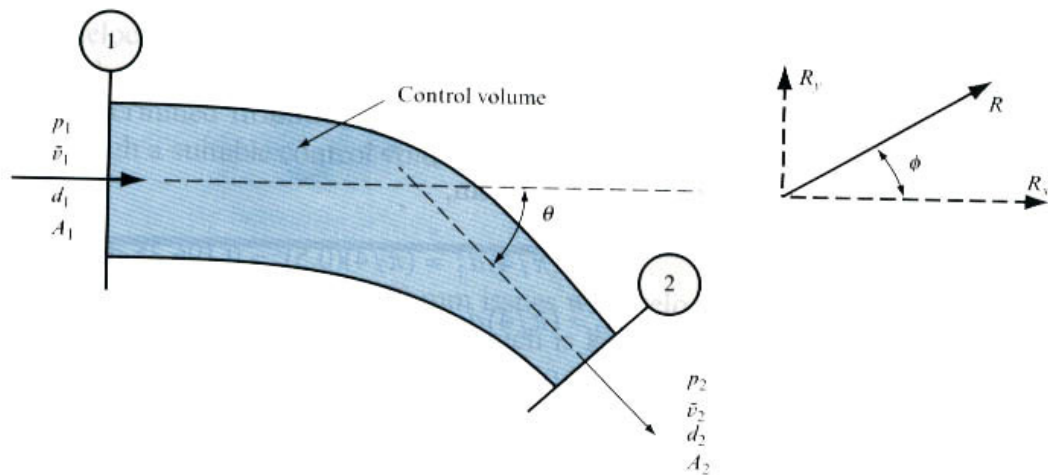
$$R_x = 14 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{14^2 + 17.32^2} = 22.27 \text{ N}$$

$$R_y = 17.32 \text{ N}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{R_y}{R_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{17.32}{14} \right) = 51^\circ 3'$$

نیروی وارد بر خم لوله‌ها و داکت‌ها



● خم لوله‌ای از قطر $d_1 = 500 \text{ mm}$ در ورودی به قطر $d_2 = 250 \text{ mm}$ در خروجی همراه با زاویه انحراف 45° درجه تبدیل می‌شود. فشار در مقطع ۱ برابر با 40 kPa و در مقطع خروجی 23 kPa است. اگر سیال داخل لوله روغن با چگالی نسبی 0.85 باشد، بزرگی و جهت نیروی وارد بر خم لوله‌ای را برای دبی $0.45 \text{ m}^3/\text{s}$ بدست آورید. (خم لوله‌ای در صفحه افقی قرار دارد.)

$$\sum \vec{F} = \left(\sum \rho Q \vec{v} \right)_{out} - \left(\sum \rho Q \vec{v} \right)_{in}$$

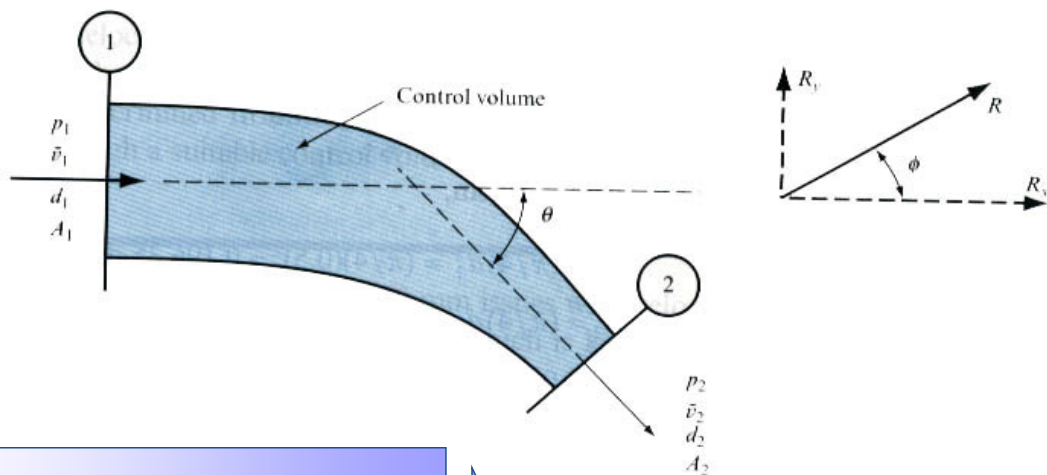
نیروی وارد بر خم لوله‌ها و داکت‌ها



نیروی وارد بر خم لوله‌ها و داکت‌ها



نیروی وارد بر خم لوله‌ها و داکت‌ها



$$\sum F_x = P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos \theta - R_x$$

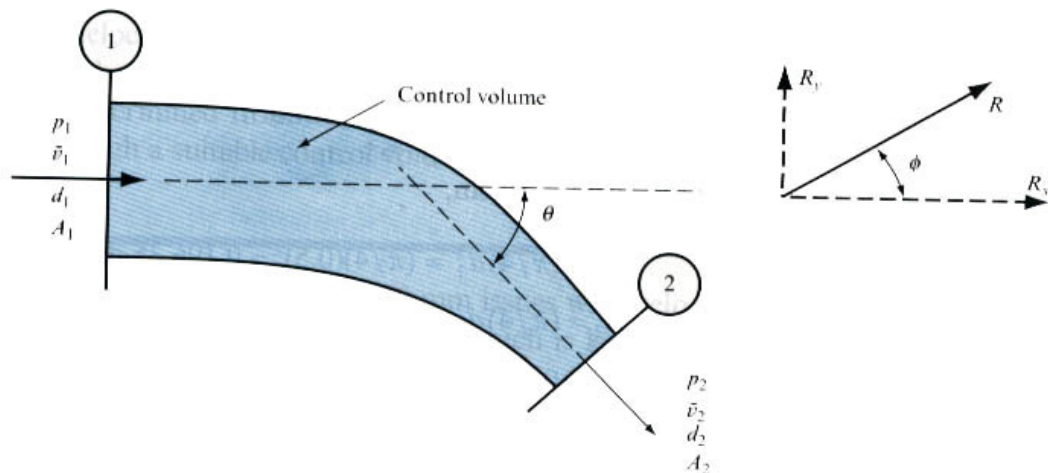
$$\rho Q (\vec{v}_{out} - \vec{v}_{in})_x = \rho Q (\bar{v}_2 \cos \theta - \bar{v}_1)$$

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos \theta - R_x = \rho Q (\bar{v}_2 \cos \theta - \bar{v}_1)$$

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos \theta - R_x = \rho Q \left(\frac{Q}{A_2} \cos \theta - \frac{Q}{A_1} \right)$$

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 \cos \theta - R_x = \rho Q^2 \left(\frac{1}{A_2} \cos \theta - \frac{1}{A_1} \right)$$

نیروی وارد بر خم لوله‌ها و داکت‌ها

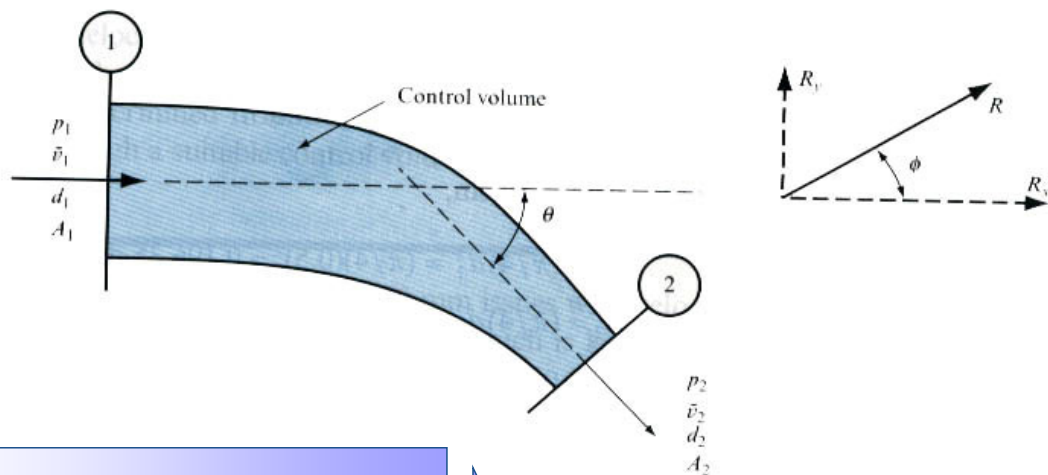


$$(40 \times 10^3) \times \left(\pi \times \frac{0.5^2}{4} \right) - (23 \times 10^3) \times \left(\pi \times \frac{0.25^2}{4} \right) \cos 45^\circ - R_x =$$

$$0.85 \times 1000 \times 0.45^2 \times \left(\frac{1}{\pi \times \frac{0.25^2}{4}} \cos 45^\circ - \frac{1}{\pi \times \frac{0.5^2}{4}} \right)$$

$$R_x = 5.454 \times 10^3 \text{ N}$$

نیروی وارد بر خم لوله‌ها و داکت‌ها



$$\sum F_y = P_2 A_2 \sin \theta - R_y$$

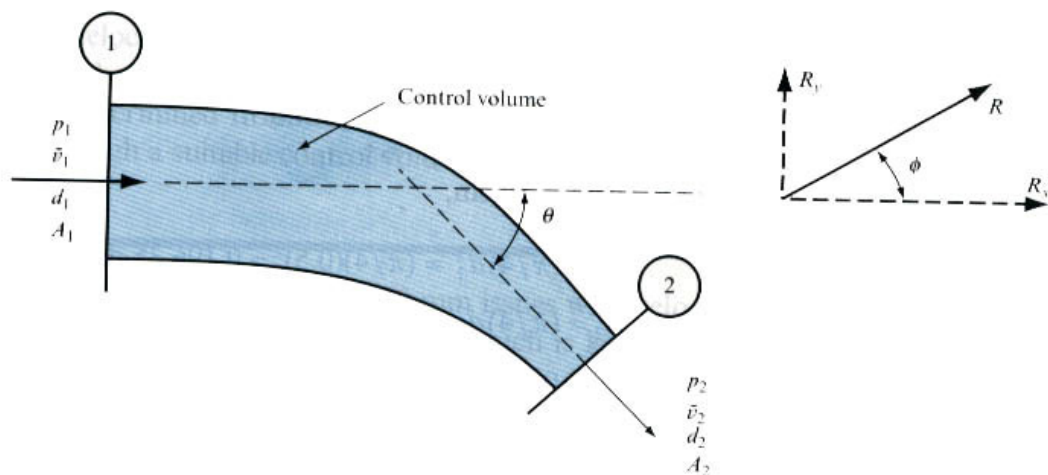
$$\rho Q (\vec{v}_{out} - \vec{v}_{in})_y = \rho Q (-\bar{v}_2 \sin \theta - 0)$$

$$P_2 A_2 \sin \theta - R_y = \rho Q (-\bar{v}_2 \sin \theta)$$

$$P_2 A_2 \sin \theta - R_y = -\rho Q \left(\frac{Q}{A_2} \sin \theta \right)$$

$$P_2 A_2 \sin \theta - R_y = -\rho Q^2 \left(\frac{1}{A_2} \sin \theta \right)$$

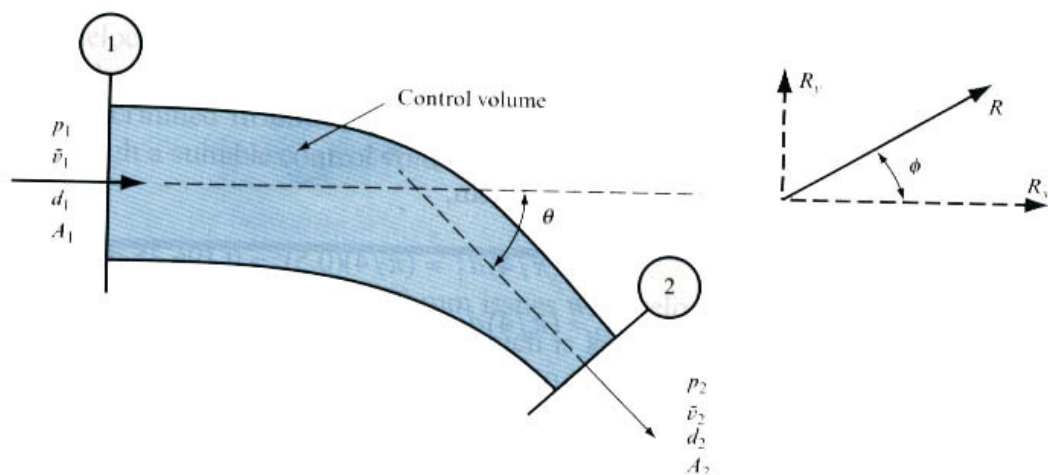
نیروی وارد بر خم لوله‌ها و داکت‌ها



$$(23 \times 10^3) \times \left(\pi \times \frac{0.25^2}{4} \right) \sin 45^\circ - R_y = -0.85 \times 1000 \times 0.45^2 \times \left(\frac{1}{\pi \times \frac{0.25^2}{4}} \sin 45^\circ \right)$$

$$R_y = 3.277 \times 10^3 \text{ N}$$

نیروی وارد بر خم لوله‌ها و داکت‌ها



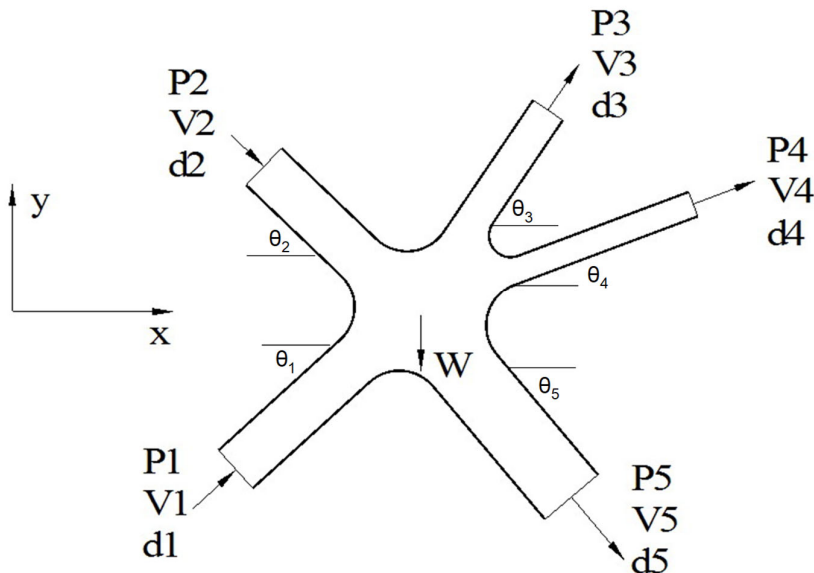
$$R_x = 5.454 \times 10^3 \text{ N} \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{5.454^2 + 3.277^2} \times 10^3 = 6.362 \times 10^3 \text{ N}$$

$$R_y = 3.277 \times 10^3 \text{ N} \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{R_y}{R_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{3.277}{5.454} \right) = 31^\circ$$

● مسئله را برای حالتی که خم در صفحه قائم باشد و حجم سیال داخل خم 2 m^3 باشد، حل کنید.

نیروی وارد بر خم لوله‌ها و داکت‌ها

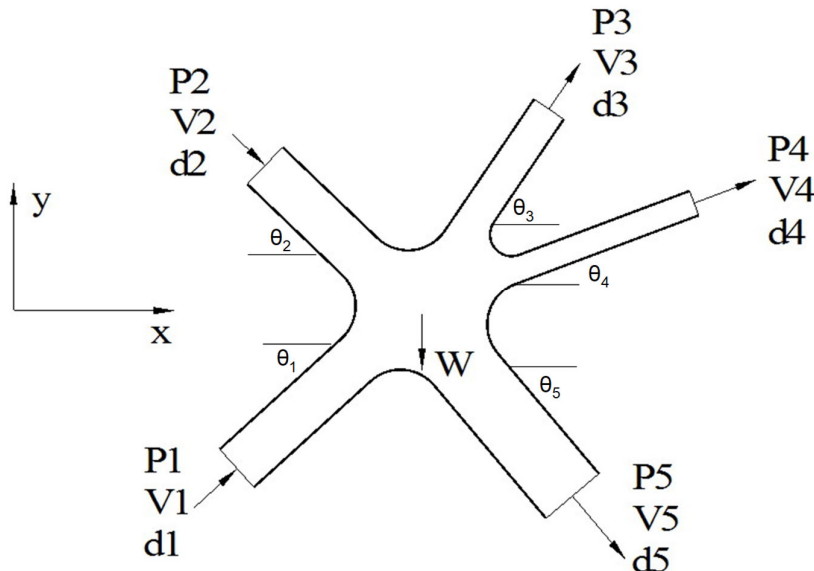
با فرض آنکه نیروهای وارد بر حجم کنترل در جهت محورهای مختصات باشند:



$$\sum F_x = \left(\sum \rho Q v \right)_{x,out} - \left(\sum \rho Q v \right)_{x,in}$$

$$\begin{aligned} -R_x + p_1 A_1 \cos \theta_1 + p_2 A_2 \cos \theta_2 - p_3 A_3 \cos \theta_3 - p_4 A_4 \cos \theta_4 - p_5 A_5 \cos \theta_5 \\ = (\rho Q_3 V_3 \cos \theta_3 + \rho Q_4 V_4 \cos \theta_4 + \rho Q_5 V_5 \cos \theta_5) \\ - (\rho Q_1 V_1 \cos \theta_1 + \rho Q_2 V_2 \cos \theta_2) \end{aligned}$$

نیروی وارد بر خم لوله‌ها و داکت‌ها



$$\sum F_y = \left(\sum \rho Q v \right)_{y,out} - \left(\sum \rho Q v \right)_{y,in}$$

$$\begin{aligned} -R_y + p_1 A_1 \sin \theta_1 - p_2 A_2 \sin \theta_2 - p_3 A_3 \sin \theta_3 - p_4 A_4 \sin \theta_4 + p_5 A_5 \sin \theta_5 - W \\ = (\rho A_3 V_3^2 \sin \theta_3 + \rho A_4 V_4^2 \sin \theta_4 - \rho A_5 V_5^2 \sin \theta_5) \\ - (\rho A_1 V_1^2 \sin \theta_1 - \rho A_2 V_2^2 \sin \theta_2) \end{aligned}$$