مکانیک سیالات

معادله پیوستگی

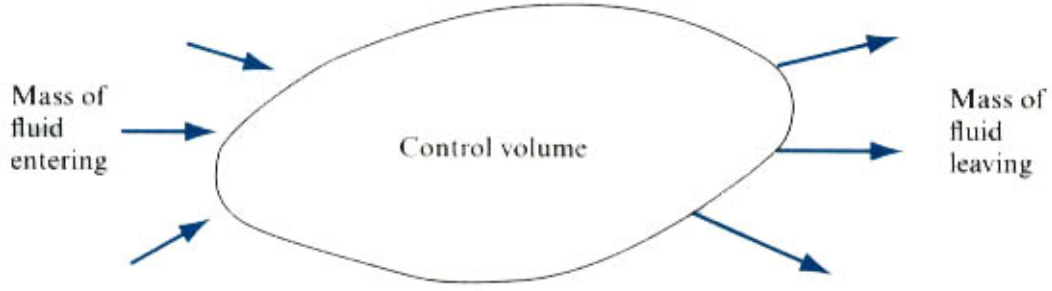
www.hadian.ir

محمدرضا هادیان
دانشگاه یزد – دانشکده مهندسی عمران

معادله پیوستگی

- بجز در فرآیندهای هسته‌ای، ماده نه به وجود می‌آید و نه از بین می‌رود.
- قانون بقای جرم را برای یک حجم کنترل می‌توان بصورت زیر بیان نمود:

جرم سیال ورودی در واحد زمان
=
جرم سیال خروجی در واحد زمان
+
افزایش جرم سیال در حجم کنترل در واحد زمان



معادله پیوستگی

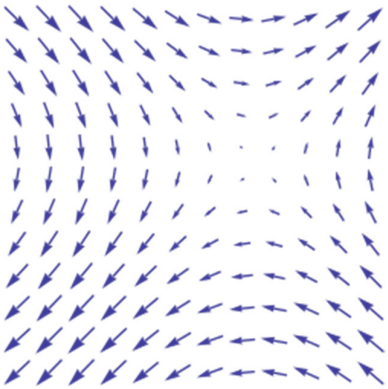
- در حالت ماندگار، جرم سیال در داخل حجم کنترل ثابت می‌ماند و خواهیم داشت:

جرم سیال ورودی در واحد زمان= جرم سیال خروجی در واحد زمان

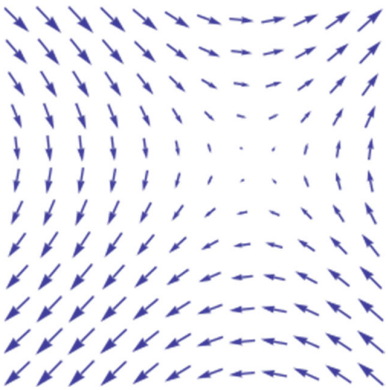
لوله جریان

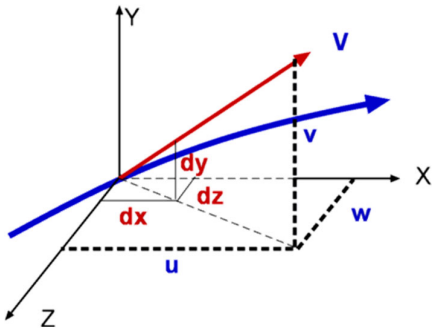
- در خصوص مفاهیم زیر تحقیق کنید:
  - خط جریان
  - خط مسیر
  - خط لکه

لوله جریان

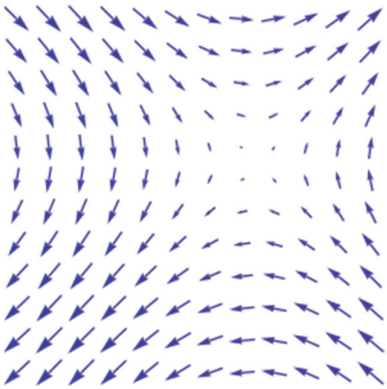


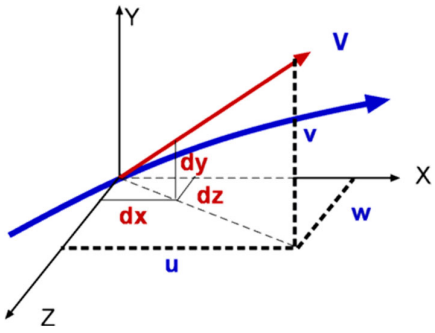
لوله جریان

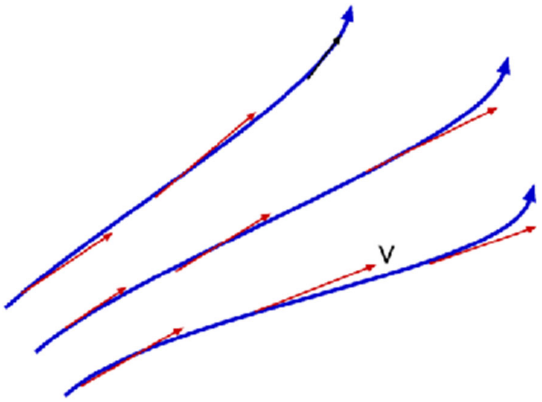




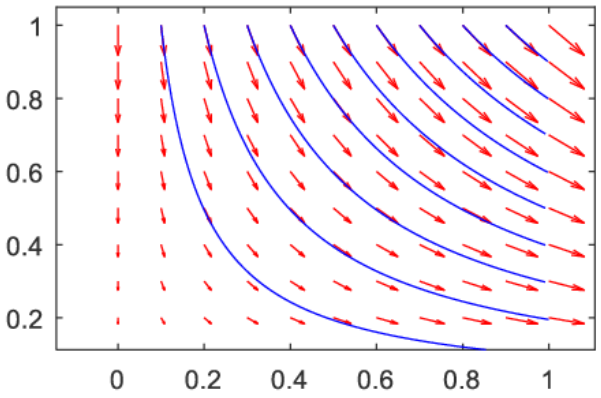
لوله جریان



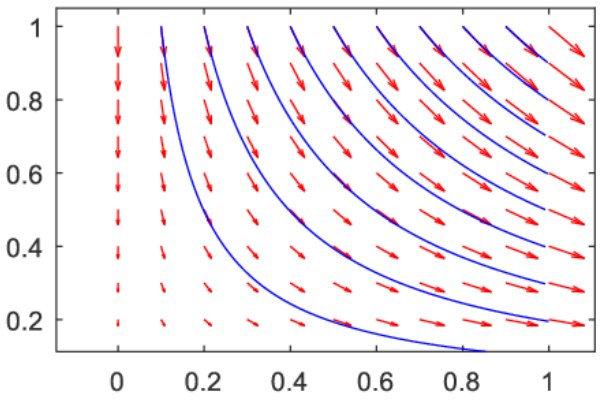


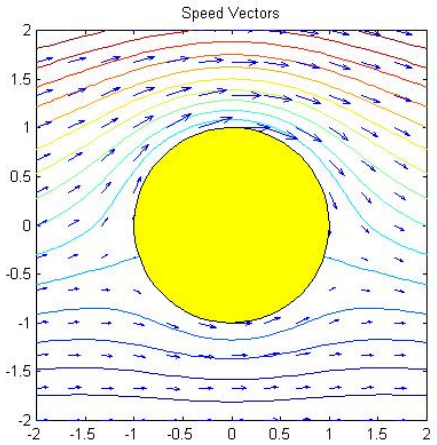


لوله جریان

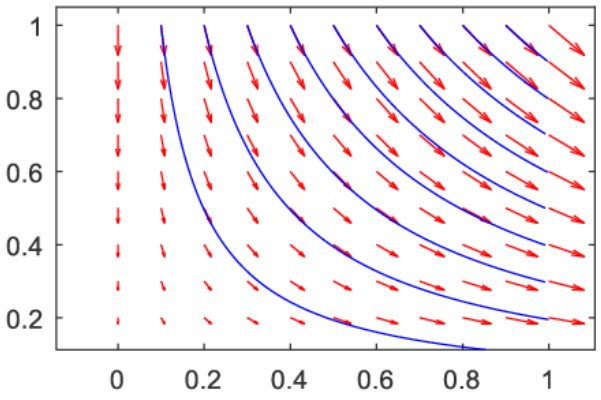


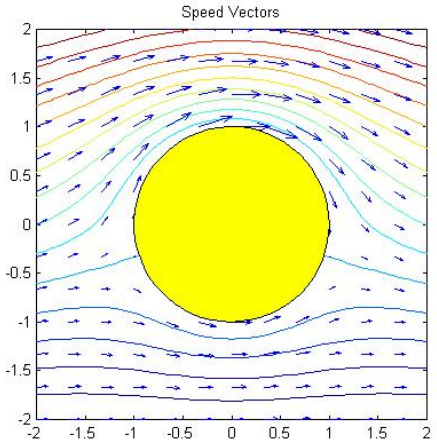
لوله جریان

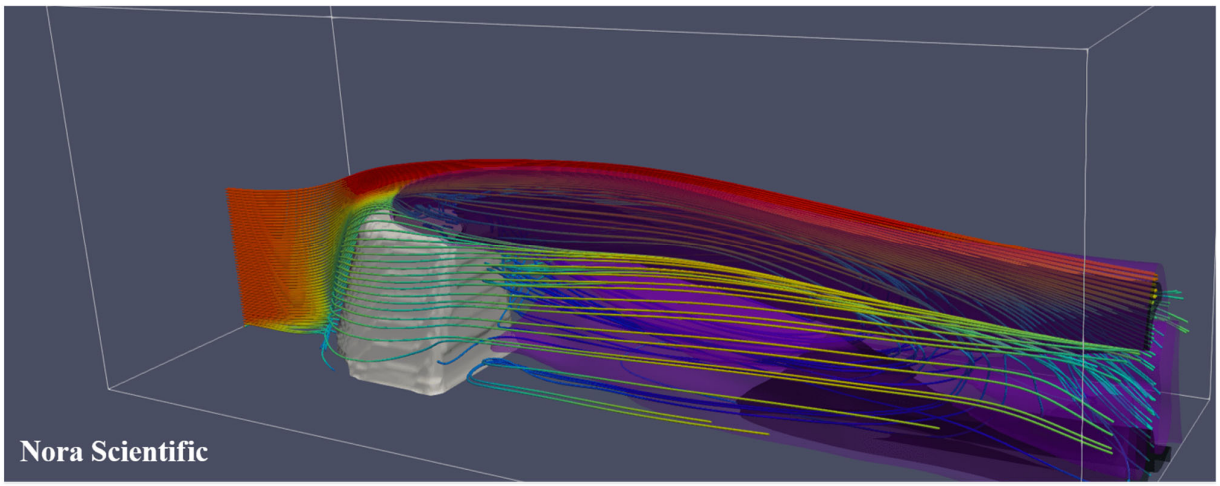




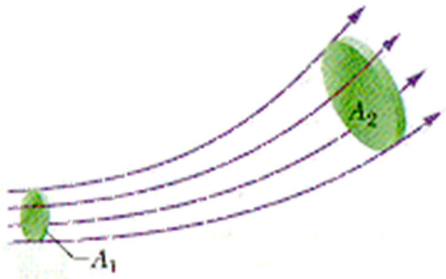
لوله جریان

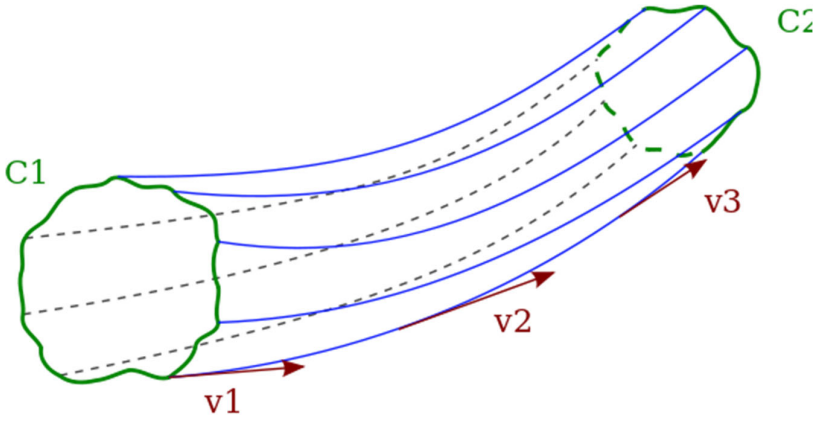






لوله جریان





معادله پیوستگی

- در حالت ماندگار، جرم سیال در داخل حجم کنترل ثابت می‌ماند و خواهیم داشت:

جرم سیال ورودی در واحد زمان= جرم سیال خروجی در واحد زمان

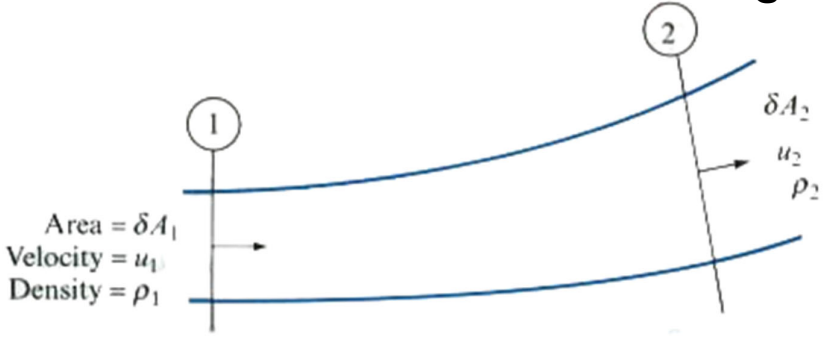
- **برای لوله جریان بصورت شکل زیر:**
  - چنانچه سطح مقطع آن به اندازه کافی کوچک باشد که بتوان سرعت را در مقطع ثابت فرض کرد.
  - برای ناحیه بین مقاطع ۱ و ۲ معادله بقاء جرم بدین صورت نوشته می‌شود:

جرم ورودی در واحد زمان از مقطع ۱=جرم خروجی در واحد زمان از مقطع ۲

Mass entering per unit time at section 1=$\rho_1 \delta A_1 u_1$

Mass leaving per unit time at section 2=$\rho_2 \delta A_2 u_2$

- **u_1 و u_2 سرعت در امتداد عمود بر مقطع است.**



معادله پیوستگی

- بنابراین برای حالت ماندگار خواهیم داشت:

$$\rho_1 \delta A_1 u_1 = \rho_2 \delta A_2 u_2 = \text{constant}$$

معادله پیوستگی برای سیال قابل تراکم در یک لوله جریان

- برای سیال واقعی از یک لوله یا داکت با استفاده از تعریف سرعت متوسط رابطه پیوستگی را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$\rho_1 A_1 \bar{u}_1 = \rho_2 A_2 \bar{u}_2 = \dot{m}$$

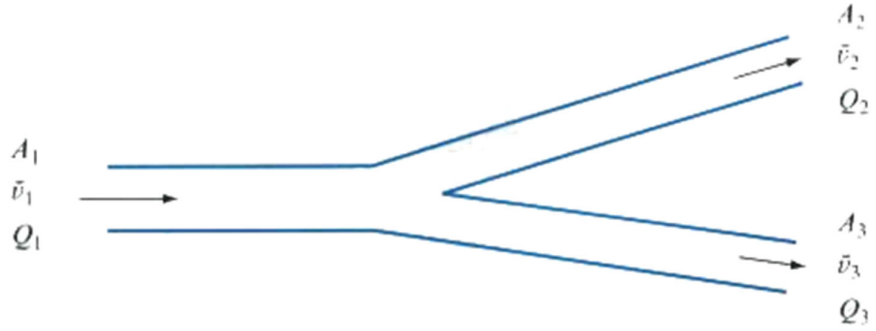
- در رابطه فوق A_1 و A_2 سطح مقطع کل و $\dot{m}$ دبی جرمی می‌باشد.

- برای سیال غیرقابل تراکم خواهیم داشت:

$$A_1 \bar{u}_1 = A_2 \bar{u}_2 = Q$$

معادله پیوستگی

- اگر بیشتر از یک مقطع ورودی یا خروجی برای یک حجم کنترل داشته باشیم، باز هم رابطه را برای شارهای ورودی و خروجی می‌نویسیم.



کل دبی ورودی = کل دبی خروجی

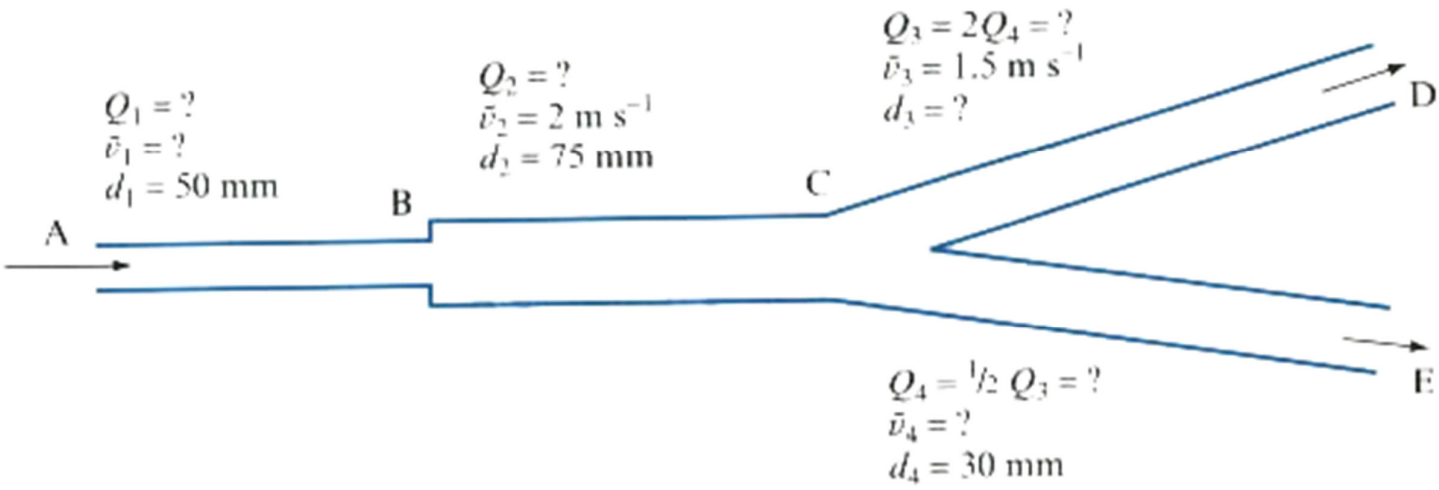
$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 + \rho_3 Q_3 \quad \xrightarrow{\text{for incompressible fluid, } \rho_1 = \rho_2 = \rho_3} \quad Q_1 = Q_2 + Q_3$$

بطورکلی در صورت وجود چندین ورودی و خروجی با فرض دبی ورودی بصورت مثبت و دبی خروجی بصورت منفی:

$$\sum \rho_i Q_i = 0$$

مثال

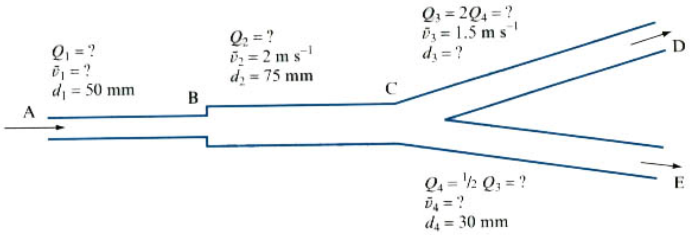
- جریان در مجموعه لوله داده شده از A به D و E در حرکت است. مقادیر مجهول در شکل را محاسبه کنید.



$$Q_1 = Q_2 = (Q_3 + Q_4) = 1.5Q_3$$

$$Q = A\bar{v}$$

مثال



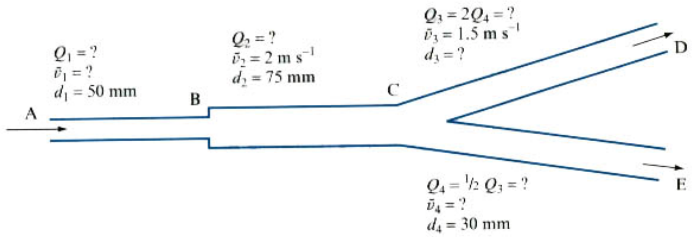
$$Q_1 = Q_2 = A_2\bar{v}_2 = \left(\pi\frac{d_2^2}{4}\right)\bar{v}_2 = \left(\pi\frac{0.075^2}{4}\right)\times 2 = 8.839\times10^{-3}\ \frac{\text{m}^3}{s}$$

$$Q_1 = A_1\bar{v}_1 \qquad \bar{v}_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_1}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = \frac{8.839\times10^{-3}}{\frac{\pi\times0.05^2}{4}} = 4.27\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Q_3 = \frac{Q_2}{1.5} = \frac{8.839\times10^{-3}}{1.5} = 5.893\times10^{-3}\ \frac{\text{m}^3}{s}$$

$$\frac{\pi}{4}d_3^2 = \frac{Q_3}{\bar{v}_3} \qquad d_3 = \sqrt{\frac{Q_3}{\frac{\pi}{4}\bar{v}_3}} = \sqrt{\frac{5.893\times10^{-3}}{\frac{\pi}{4}\times1.5}} = 0.0707\ \text{m}$$

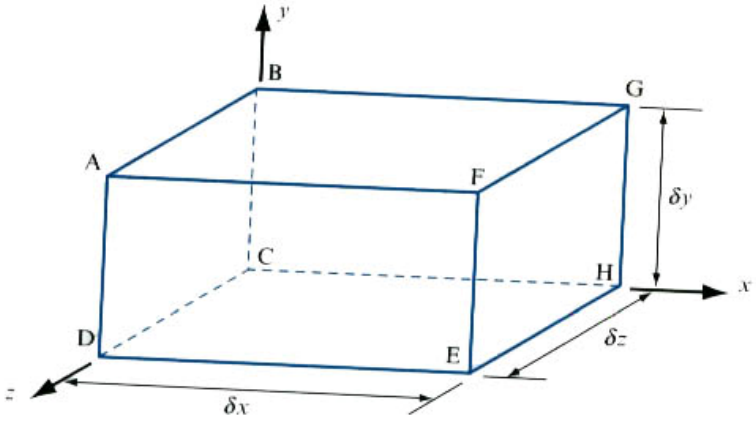
مثال



$$Q_4 = 0.5Q_3 = 0.5 \times 5.893 \times 10^{-3} = 2.947 \times 10^{-3}\ \frac{\mathrm{m}^3}{s}$$

$$\bar{v}_4 = \frac{Q_4}{A_4} = \frac{Q_4}{\frac{\pi d_4^2}{4}} = \frac{2.947 \times 10^{-3}}{\frac{\pi \times 0.03^2}{4}} = 4.17\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

معادله پیوستگی در حالت سه‌بعدی با استفاده از مختصات کارتزین

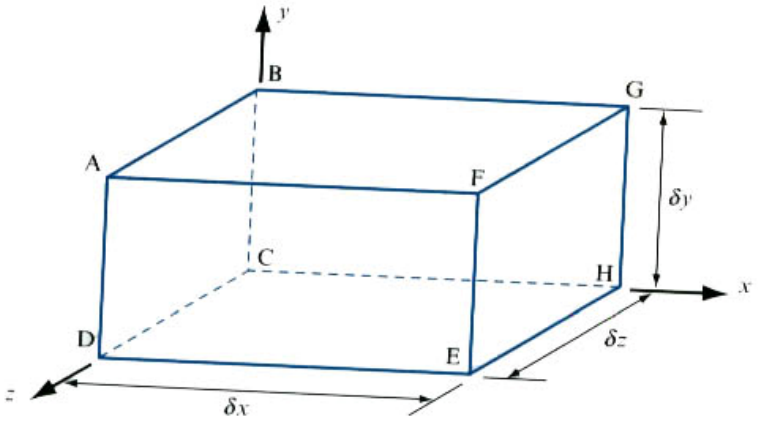


Mass inflow through ABCD in unit time = $\rho u \delta y \delta z$

Mass outflow through EFGH in unit time = $\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\delta x\right]\delta y \delta z$

Net outflow in unit time in x direction = $\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\delta x \delta y \delta z$

معادله پیوستگی در حالت سه‌بعدی با استفاده از مختصات کارتزین



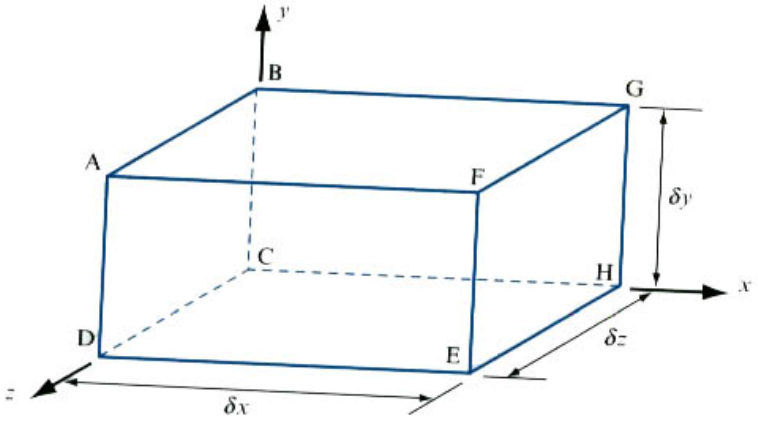
$$\text{Net outflow in unit time in x direction} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\delta x\delta y\delta z$$

$$\text{Net outflow in unit time in y direction} = \frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\delta x\delta y\delta z$$

$$\text{Net outflow in unit time in z direction} = \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\delta x\delta y\delta z$$

$$\text{Total net outflow in unit time} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right]\delta x\delta y\delta z$$

معادله پیوستگی در حالت سه‌بعدی با استفاده از مختصات کارتزین



$$\text{Change of mass in control volume in unit time} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\delta x\delta y\delta z$$

- علامت منفی بدلیل مثبت گرفتن شارهای خروجی است.

کل شار خروجی در واحد زمان= تغییرات جرم در حجم کنترل در واحد زمان

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right]\delta x\delta y\delta z = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\delta x\delta y\delta z$$

معادله پیوستگی در حالت سه‌بعدی با استفاده از مختصات کارتزین

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0$$

- برای سیال غیرقابل تراکم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

- در حالت دوبعدی:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$