هیدرولیک محاسباتی

جریان یک بعدی غیردائمی در کانال‌ها

محمدرضا هادیان

دانشگاه یزد- دانشکده مهندسی عمران

روش Gabutti

- این روش توسعه روش λ است. واز فرم λ معادلات استفاده می کند.
- روش دارای دو گام در مرحله پیش‌بینی و یک گام در مرحله اصلاح است.

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{+}+\lambda^{-}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-}\right]+\frac{1}{2}\frac{c}{g}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{+}-\lambda^{-}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-}\right]=0 \quad (I)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{g}{c}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{+}-\lambda^{-}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-}\right]+\frac{1}{2}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{+}+\lambda^{-}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-}\right]= g\left(S_0-S_f\right) \quad (II)$$

روش Gabutti–مرحله پیش‌بینی– گام اول

- مرحله پیش‌بینی- گام اول:
  - مشتق مکانی برای علامت مثبت با مرتبه ۱ پس‌رو
  - مشتق مکانی برای علامت منفی با مرتبه ۱ پیش‌رو

$$f_x^{+}=\frac{f_i^n-f_{i-1}^n}{\Delta x} \qquad f_x^{-}=\frac{f_{i+1}^n-f_i^n}{\Delta x}$$

  - نتایج گام اول مرحله پیش‌بینی با بالانویس * مشخص می‌شوند:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{f_i^{*}-f_i^n}{\Delta t}$$

روش Gabutti–مرحله پیش‌بینی– گام اول

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{+}+\lambda^{-}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-}\right]+\frac{1}{2}\frac{c}{g}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{+}-\lambda^{-}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-}\right]=0 \quad (I)$$

$$\begin{aligned} h_i^{*}=h_i^n-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\lambda^{+}\left(h_i^n-h_{i-1}^n\right)+\lambda^{-}\left(h_{i+1}^n-h_i^n\right)\right] \\ -\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{c_i^n}{g}\left[\lambda^{+}\left(u_i^n-u_{i-1}^n\right)-\lambda^{-}\left(u_{i+1}^n-u_i^n\right)\right] \end{aligned} \quad (III)$$

روش Gabutti–مرحله پیش‌بینی– گام اول

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{g}{c}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{+}-\lambda^{-}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-}\right]+\frac{1}{2}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{+}+\lambda^{-}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-}\right]= g\left(S_0-S_f\right) \qquad (II)$$

$$\begin{aligned} u_i^{*}=u_i^{n}&-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{g}{c_i^{n}}\left[\lambda^{+}\left(h_i^{n}-h_{i-1}^{n}\right)-\lambda^{-}\left(h_{i+1}^{n}-h_i^{n}\right)\right]\\ &-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\lambda^{+}\left(u_i^{n}-u_{i-1}^{n}\right)+\lambda^{-}\left(u_{i+1}^{n}-u_i^{n}\right)\right] \qquad (IV)\\ &+g\Delta t\left(S_0-S_f^{n}\right)\end{aligned}$$

روش Gabutti–مرحله پیش‌بینی– گام اول

$$\begin{aligned} h_i^{*}=h_i^{n}&-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\lambda^{+}\left(h_i^{n}-h_{i-1}^{n}\right)+\lambda^{-}\left(h_{i+1}^{n}-h_i^{n}\right)\right] \qquad (III)\\ &-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{c_i^{n}}{g}\left[\lambda^{+}\left(u_i^{n}-u_{i-1}^{n}\right)-\lambda^{-}\left(u_{i+1}^{n}-u_i^{n}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_i^{*}=u_i^{n}&-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{g}{c_i^{n}}\left[\lambda^{+}\left(h_i^{n}-h_{i-1}^{n}\right)-\lambda^{-}\left(h_{i+1}^{n}-h_i^{n}\right)\right]\\ &-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\lambda^{+}\left(u_i^{n}-u_{i-1}^{n}\right)+\lambda^{-}\left(u_{i+1}^{n}-u_i^{n}\right)\right] \qquad (IV)\\ &+g\Delta t\left(S_0-S_f^{n}\right)\end{aligned}$$

روش Gabutti–مرحله پیش‌بینی– گام دوم

- مرحله پیش‌بینی– گام دوم:
  - مشتق مکانی برای علامت مثبت با مرتبه ۲ پس‌رو
  - مشتق مکانی برای علامت منفی با مرتبه ۲ پیش‌رو

$$f_x^+ = \frac{2f_i^n - 3f_{i-1}^n + f_{i-2}^n}{\Delta x} \qquad f_x^- = \frac{-2f_i^n + 3f_{i+1}^n - f_{i+2}^n}{\Delta x}$$

- در گام دوم مرحله پیش‌بینی مقادیر مشتق زمانی h و u محاسبه شده و با بالانویس * مشخص می‌شوند.

روش Gabutti–مرحله پیش‌بینی– گام دوم

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\lambda^+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^+ + \lambda^-\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^-\right] + \frac{1}{2}\frac{c}{g}\left[\lambda^+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^+ - \lambda^-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^-\right] = 0 \qquad (I)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_i^* = h_t^* = -\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix}\lambda^+\left(2h_i^n - 3h_{i-1}^n + h_{i-2}^n\right) + \\ \lambda^-\left(-2h_i^n + 3h_{i+1}^n - h_{i+2}^n\right)\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\frac{c_i^n}{g}\begin{bmatrix}\lambda^+\left(2u_i^n - 3u_{i-1}^n + u_{i-2}^n\right) - \\ \lambda^-\left(-2u_i^n + 3u_{i+1}^n - u_{i+2}^n\right)\end{bmatrix} \qquad (V)$$

دانشگاه یزد دانشکده مهندسی عمران محمدرضا هادیان پاییز ۱۳۹۹

روش Gabutti–مرحله پیش‌بینی– گام دوم

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{g}{c}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{+}-\lambda^{-}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-}\right]+\frac{1}{2}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{+}+\lambda^{-}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-}\right]= g\left(S_0-S_f\right) \qquad (II)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{*}=u_t^{*}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\frac{g}{c_i^n}\begin{bmatrix}\lambda^{+}\left(2h_i^n-3h_{i-1}^n+h_{i-2}^n\right)- \\ \lambda^{-}\left(-2h_i^n+3h_{i+1}^n-h_{i+2}^n\right)\end{bmatrix} -\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix}\lambda^{+}\left(2u_i^n-3u_{i-1}^n+u_{i-2}^n\right)+ \\ \lambda^{-}\left(-2u_i^n+3u_{i+1}^n-u_{i+2}^n\right)\end{bmatrix} +g\left(S_0-S_f^n\right) \qquad (VI)$$

روش Gabutti–مرحله پیش‌بینی– گام دوم

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_i^{*}=h_t^{*}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix}\lambda^{+}\left(2h_i^n-3h_{i-1}^n+h_{i-2}^n\right)+ \\ \lambda^{-}\left(-2h_i^n+3h_{i+1}^n-h_{i+2}^n\right)\end{bmatrix} -\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\frac{c_i^n}{g}\begin{bmatrix}\lambda^{+}\left(2u_i^n-3u_{i-1}^n+u_{i-2}^n\right)- \\ \lambda^{-}\left(-2u_i^n+3u_{i+1}^n-u_{i+2}^n\right)\end{bmatrix} \qquad (V)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{*}=u_t^{*}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\frac{g}{c_i^n}\begin{bmatrix}\lambda^{+}\left(2h_i^n-3h_{i-1}^n+h_{i-2}^n\right)- \\ \lambda^{-}\left(-2h_i^n+3h_{i+1}^n-h_{i+2}^n\right)\end{bmatrix} -\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix}\lambda^{+}\left(2u_i^n-3u_{i-1}^n+u_{i-2}^n\right)+ \\ \lambda^{-}\left(-2u_i^n+3u_{i+1}^n-u_{i+2}^n\right)\end{bmatrix} +g\left(S_0-S_f^n\right) \qquad (VI)$$

روش Gabutti–مرحله اصلاح

- مرحله اصلاح:
  - مشتق مکانی برای علامت مثبت با مرتبه ۱ پس‌رو
  - مشتق مکانی برای علامت منفی با مرتبه ۱ پیش‌رو

$$f_x^+ = \frac{f_i^* - f_{i-1}^*}{\Delta x} \qquad\qquad f_x^- = \frac{f_{i+1}^* - f_i^*}{\Delta x}$$

- در مرحله اصلاح مقادیر مشتق زمانی h و u محاسبه شده و با بالانویس ** مشخص می‌شوند.

روش Gabutti–مرحله اصلاح

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\lambda^+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^+ + \lambda^-\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^-\right] + \frac{1}{2}\frac{c}{g}\left[\lambda^+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^+ - \lambda^-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^-\right] = 0 \quad (I)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_i^{**} = h_t^{**} = &-\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\left[\lambda^+\left(h_i^* - h_{i-1}^*\right) + \lambda^-\left(h_{i+1}^* - h_i^*\right)\right] \\ &-\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\frac{c_i^n}{g}\left[\lambda^+\left(u_i^* - u_{i-1}^*\right) - \lambda^-\left(u_{i+1}^* - u_i^*\right)\right]\end{aligned} \quad (VII)$$

دانشگاه یزد دانشکده مهندسی عمران محمدرضا هادیان پاییز ۱۳۹۹

روش Gabutti–مرحله اصلاح

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{g}{c}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{+}-\lambda^{-}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-}\right]+\frac{1}{2}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{+}+\lambda^{-}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-}\right]= g\left(S_0-S_f\right) \qquad (II)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{**}=u_t^{**}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\frac{g}{c_i^n}\left[\lambda^{+}\left(h_i^{*}-h_{i-1}^{*}\right)-\lambda^{-}\left(h_{i+1}^{*}-h_i^{*}\right)\right] -\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\left[\lambda^{+}\left(u_i^{*}-u_{i-1}^{*}\right)+\lambda^{-}\left(u_{i+1}^{*}-u_i^{*}\right)\right] +g\left(S_0-S_f^{*}\right) \qquad (VIII)$$

روش Gabutti–مرحله اصلاح

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_i^{**}=h_t^{**}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\left[\lambda^{+}\left(h_i^{*}-h_{i-1}^{*}\right)+\lambda^{-}\left(h_{i+1}^{*}-h_i^{*}\right)\right] -\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\frac{c_i^n}{g}\left[\lambda^{+}\left(u_i^{*}-u_{i-1}^{*}\right)-\lambda^{-}\left(u_{i+1}^{*}-u_i^{*}\right)\right] \qquad (VII)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{**}=u_t^{**}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\frac{g}{c_i^n}\left[\lambda^{+}\left(h_i^{*}-h_{i-1}^{*}\right)-\lambda^{-}\left(h_{i+1}^{*}-h_i^{*}\right)\right] -\frac{1}{2}\frac{1}{\Delta x}\left[\lambda^{+}\left(u_i^{*}-u_{i-1}^{*}\right)+\lambda^{-}\left(u_{i+1}^{*}-u_i^{*}\right)\right] +g\left(S_0-S_f^{*}\right) \qquad (VIII)$$

روش Gabutti

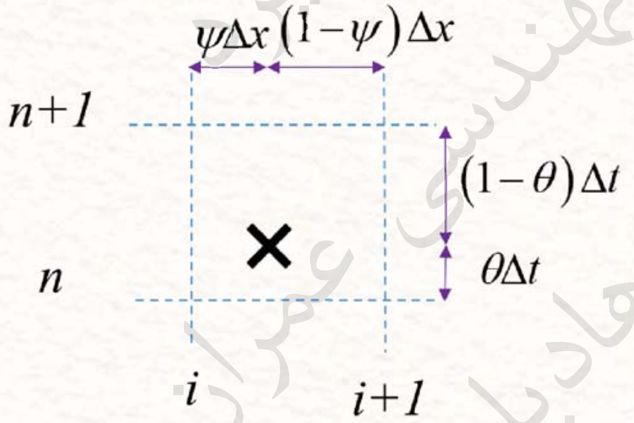
- جواب‌های نهایی برای گام زمانی جدید:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2}\Delta t\left(u_t^* + u_t^{**}\right) \qquad h_i^{n+1} = h_i^n + \frac{1}{2}\Delta t\left(h_t^* + h_t^{**}\right)$$

- برای نقاط مرزی از روش مشخصات استفاده می‌شود.
- برای نقاط مجاور مرز می‌توان تفاضل محدود مرتبه اول را بجای مرتبه دوم در مراحل مربوطه استفاده نمود.
- شرط پایداری: $1 \ge Cr > 0$ $\qquad Cr = \dfrac{\left(|u| \pm c\right)\Delta t}{\Delta x}$
- در صورت استفاده از روش برای حل مسئله ماندگار: $2 \ge Cr > 0$

روش Preissmann

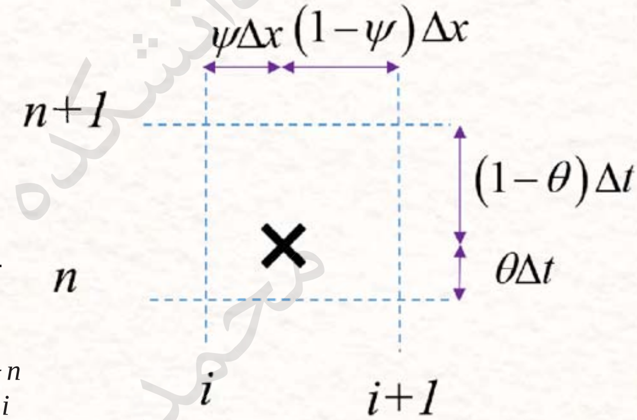
- از روشهای مشهور به قوطی است.
- برای زمان از ضریب وزنی θ و برای مکان از ضریب وزنی ψ استفاده می‌شود.



$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + S = 0$$

روش Preissmann

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+S=0$$



$$\frac{\partial U}{\partial t}\cong\psi\frac{U_{i+1}^{n+1}-U_{i+1}^{n}}{\Delta t}+(1-\psi)\frac{U_{i}^{n+1}-U_{i}^{n}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cong\theta\frac{F_{i+1}^{n+1}-F_{i}^{n+1}}{\Delta x}+(1-\theta)\frac{F_{i+1}^{n}-F_{i}^{n}}{\Delta x}$$

$$\begin{cases}\theta=0 & \Rightarrow \quad \text{Explicit}\\ \theta=1 & \Rightarrow \quad \text{Implicit}\\ \theta=0.5 & \Rightarrow \quad \text{Crank-Nicolson}\end{cases}$$

- ❑ در روش Preissman: $1\geq\theta\geq0.5$ $\quad$ $\psi=0.5$

روش Preissmann

$$\frac{U_{i+1}^{n+1}-U_{i+1}^{n}+U_{i}^{n+1}-U_{i}^{n}}{2\Delta t}+\left[\theta\frac{F_{i+1}^{n+1}-F_{i}^{n+1}}{\Delta x}+(1-\theta)\frac{F_{i+1}^{n}-F_{i}^{n}}{\Delta x}\right]+$$
$$\left[\theta\left(S_{i+1}^{n+1}+S_{i}^{n+1}\right)+(1-\theta)\left(S_{i+1}^{n}+S_{i}^{n}\right)\right]=0$$

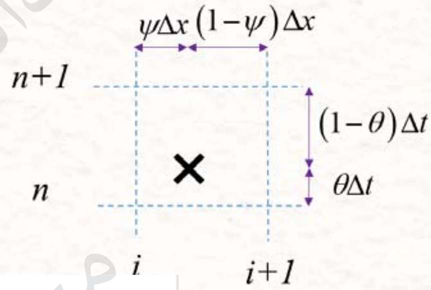
$$U_{i+1}^{n+1}-U_{i+1}^{n}+U_{i}^{n+1}-U_{i}^{n}+2\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\theta\left(F_{i+1}^{n+1}-F_{i}^{n+1}\right)+(1-\theta)\left(F_{i+1}^{n}-F_{i}^{n}\right)\right]+$$
$$2\Delta t\left[\theta\left(S_{i+1}^{n+1}+S_{i}^{n+1}\right)+(1-\theta)\left(S_{i+1}^{n}+S_{i}^{n}\right)\right]=0$$

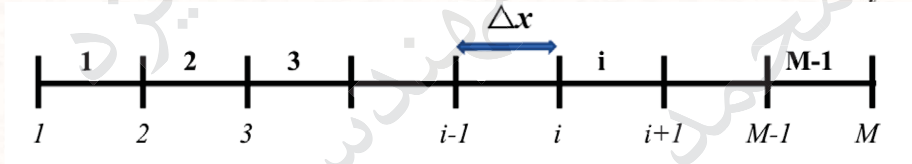
- ❑ این معادله برداری، ۲ معادله برای یک سلول می‌دهد.
- ❑ در هر سلول ۸ متغیر دخالت دارند که ۴ تا مجهول هستند:

$$u_i^n, u_{i+1}^n, \boxed{u_i^{n+1}, u_{i+1}^{n+1}}$$
$$h_i^n, h_{i+1}^n, \boxed{h_i^{n+1}, h_{i+1}^{n+1}}$$

روش Preissmann

$$\begin{cases} A_i h_i^{n+1} + B_i u_i^{n+1} + C_i h_{i+1}^{n+1} + D_i u_{i+1}^{n+1} = E_i \\ A'_i h_i^{n+1} + B'_i u_i^{n+1} + C'_i h_{i+1}^{n+1} + D'_i u_{i+1}^{n+1} = E'_i \end{cases}$$

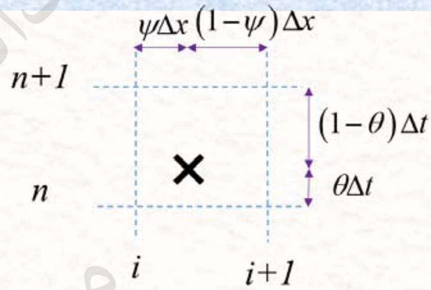


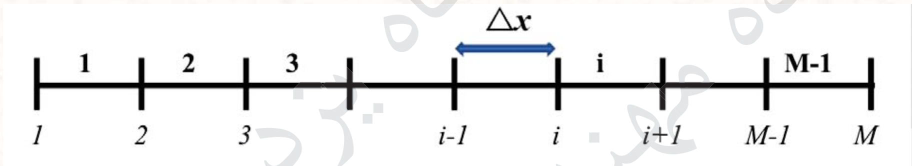


- تعداد مجهولات: 2M
- تعداد معادلات: 2(M-1)
- شرایط مرزی: 2

روش Preissmann

$$\begin{cases} A_i h_i^{n+1} + B_i u_i^{n+1} + C_i h_{i+1}^{n+1} + D_i u_{i+1}^{n+1} = E_i \\ A'_i h_i^{n+1} + B'_i u_i^{n+1} + C'_i h_{i+1}^{n+1} + D'_i u_{i+1}^{n+1} = E'_i \end{cases}$$





$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & & & \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 & & & & \\ & & A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & & \\ & & A'_2 & B'_2 & C'_2 & D'_2 & & \\ & & & & & & & \\ & & & & A_{M-1} & B_{M-1} & C_{M-1} & D_{M-1} \\ & & & & A'_{M-1} & B'_{M-1} & C'_{M-1} & D'_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ u_1 \\ h_2 \\ u_2 \\ \vdots \\ h_M \\ u_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E'_1 \\ E_2 \\ E'_2 \\ \vdots \\ E_{M-1} \\ E'_{M-1} \end{bmatrix}$$

روش Preissmann

❑ با روش جاروی دوطرفه دستگاه را حل می کنند.

❖ فرض می کنیم:

$$\begin{cases} u_i = F_i h_i + G_i \\ h_{i-1} = I_i h_i + J_i u_i + L_i \end{cases}$$

❖ اگر در بالادست u معلوم باشد: $u_1 = G_1 \ , \ \ F_1 = 0$

❖ اگر در بالادست h معلوم باشد: $F_1 = 10^6 \quad , \quad G_1 = -F_1 h_1$

$$h_i = \frac{1}{F_i} u_i - \frac{G_i}{F_i}$$

❖ یا کلاً رابطه را بصورت $h_i = F_i u_i + G_i$ در نظر می گیرند و روابط آنها متفاوت می‌شود.

روش Preissmann

$$A_i h_i + B_i u_i + C_i h_{i+1} + D_i u_{i+1} = E_i$$

$$u_i = F_i h_i + G_i$$

$$A_i h_i + B_i \left(F_i h_i + G_i \right) + C_i h_{i+1} + D_i u_{i+1} = E_i$$

$$h_i = \frac{-C_i}{A_i + B_i F_i} h_{i+1} + \frac{-D_i}{A_i + B_i F_i} u_{i+1} + \frac{E_i - B_i G_i}{A_i + B_i F_i}$$

$$h_i = I_{i+1} h_{i+1} + J_{i+1} u_{i+1} + L_{i+1}$$

$$I_{i+1} = \frac{-C_i}{A_i + B_i F_i} \qquad J_{i+1} = \frac{-D_i}{A_i + B_i F_i} \qquad L_{i+1} = \frac{E_i - B_i G_i}{A_i + B_i F_i}$$

دانشگاه یزد
دانشکده مهندسی عمران
محمدرضا هادیان
پاییز ۱۳۹۹

روش Preissmann

$$\begin{cases} u_i = F_i h_i + G_i \\ h_{i-1} = I_i h_i + J_i u_i + L_i \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{i+1} = F_{i+1} h_{i+1} + G_{i+1} \\ \boxed{h_i = I_{i+1} h_{i+1} + J_{i+1} u_{i+1} + L_{i+1}} \end{cases}$$

$$A'_i h_i + B'_i u_i + C'_i h_{i+1} + D'_i u_{i+1} = E'_i$$

$$A'_i h_i + B'_i \left(F_i h_i + G_i \right) + C'_i h_{i+1} + D'_i u_{i+1} = E'_i$$

$$\left(A'_i + B'_i F_i \right) \boxed{h_i} + C'_i h_{i+1} + D'_i u_{i+1} = E'_i - B'_i G_i$$

$$\left(A'_i + B'_i F_i \right) \left(I_{i+1} h_{i+1} + J_{i+1} u_{i+1} + L_{i+1} \right) + C'_i h_{i+1} + D'_i u_{i+1} = E'_i - B'_i G_i$$

$$u_{i+1} = -\frac{A'_i I_{i+1} + B'_i F_i I_{i+1} + C'_i}{A'_i J_{i+1} + B'_i F_i J_{i+1} + D'} h_{i+1} + \frac{E'_i - B'_i G_i - A'_i L_{i+1} - B'_i F_i L_{i+1}}{A'_i J_{i+1} + B'_i F_i J_{i+1} + D'}$$

$$F_{i+1} = -\frac{A'_i I_{i+1} + B'_i F_i I_{i+1} + C'_i}{A'_i J_{i+1} + B'_i F_i J_{i+1} + D'} \qquad G_{i+1} = \frac{E'_i - B'_i G_i - A'_i L_{i+1} - B'_i F_i L_{i+1}}{A'_i J_{i+1} + B'_i F_i J_{i+1} + D'}$$

روش Preissmann

$$u_i = F_i h_i + G_i$$

$$I_{i+1} = \frac{-C_i}{A_i + B_i F_i} \qquad J_{i+1} = \frac{-D_i}{A_i + B_i F_i} \qquad L_{i+1} = \frac{E_i - B_i G_i}{A_i + B_i F_i}$$

$$F_{i+1} = -\frac{A'_i I_{i+1} + B'_i F_i I_{i+1} + C'_i}{A'_i J_{i+1} + B'_i F_i J_{i+1} + D'} \qquad G_{i+1} = \frac{E'_i - B'_i G_i - A'_i L_{i+1} - B'_i F_i L_{i+1}}{A'_i J_{i+1} + B'_i F_i J_{i+1} + D'}$$

$$u_1 \rightarrow F_1, G_1 \rightarrow I_2, J_2, L_2 \rightarrow F_2, G_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_M, J_M, L_M \rightarrow F_M, G_M$$

$$h_1 \xleftarrow{I_2, J_2, L_2} \boxed{u_2 \xleftarrow{F_2, G_2} h_2} \cdots h_{M-1} \xleftarrow{I_M, J_M, L_M} \boxed{u_M \xleftarrow{F_M, G_M} h_M}$$

$$\begin{cases} u_i = F_i h_i + G_i \\ h_{i-1} = I_i h_i + J_i u_i + L_i \end{cases}$$

Any Question?