دانشگاه یزد

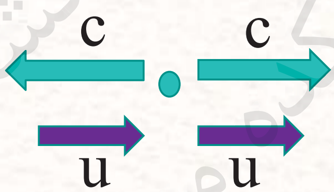
هیدرولیک محاسباتی

جریان یک بعدی غیردائمی در کانال‌ها

محمدرضا هادیان

دانشگاه یزد- دانشکده مهندسی عمران

خطوط مشخصه در جریان زیر/فوق بحرانی



❖جریان زیر بحرانی $u < c \Rightarrow u - c < 0$

❖ یک خط مشخصه به سمت پایین‌دست و یک خط مشخصه به بالادست می‌رود.

❖جریان فوق بحرانی $u > c \Rightarrow u - c > 0$

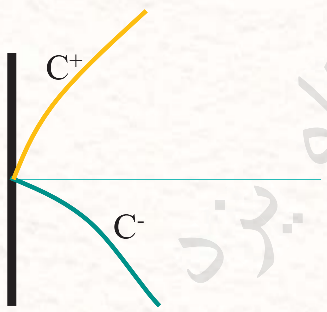
❖ هر دو خط مشخصه به سمت پایین‌دست می‌روند.

اعمال شرایط مرزی

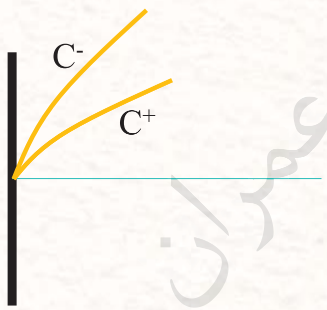
- هر خط مشخصه یک معادله (اطلاعات) را با خود منتقل می کند.
  - در جریان زیربحرانی از هر نقطه یک اطلاع به پایین‌دست و یک اطلاع به بالادست ارسال می شود.
  - در جریان فوق بحرانی هر دو معادله (اطلاعات) به پایین‌دست ارسال می‌شود وچیزی به بالادست منتقل نمی‌شود.

شرایط مرزی

- با فرض جهت جریان از چپ به راست:
- مقطع ورودی
  - زیر بحرانی — یک شرط مرزی

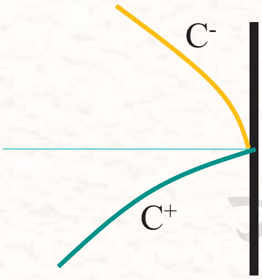


  - فوق بحرانی — دو شرط مرزی

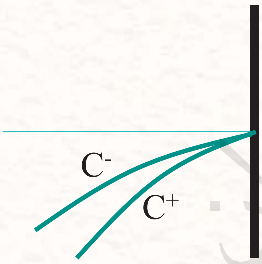


شرایط مرزی

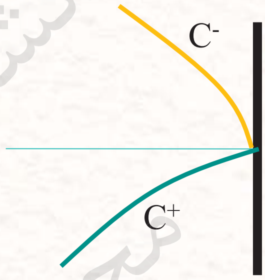
- با فرض جهت جریان از چپ به راست:
- مقطع خروجی
  - زیر بحرانی   یک شرط مرزی

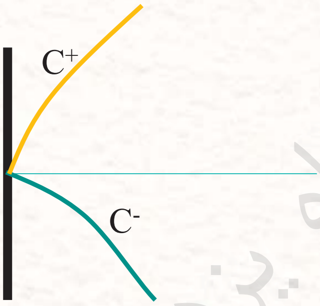


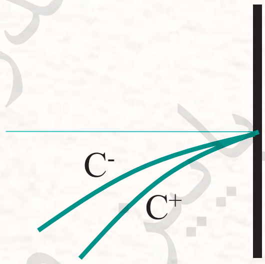
  - فوق بحرانی   بدون نیاز به شرط مرزی

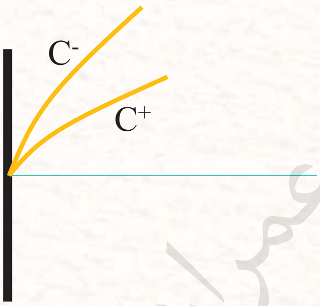


شرایط مرزی









- در هر مرز به تعداد خطوط مشخصه که از آن مرز وارد میدان می‌شود، شرط مرزی لازم است.

شرایط مرزی

- انواع شرایط مرزی:
  - دبی معلوم : $Q=Q(t)$ ⬅ هیدروگراف
  - عمق معلوم: $h=h(t)$ ⬅ جزرومد یا نوسانات آب یک دریاچه
  - رابطه دبی-اشل: $Q=Q(h)$ ⬅ سازه‌های هیدرولیکی

شرایط مرزی

- معمولاً شرط مرزی از نوع مشتق نداریم.
- معمولاً در بالادست Q و در پایین دست h یا دبی-اشل مشخص است.
- اگر در بالادست دبی-اشل استفاده شود اشکال ایجاد می کند و باعث رزونانس می‌شود.
- معرفی Q در پایین دست نیاز به توجه خاص دارد. باید نکات فیزیکی رعایت شود. (خروج دبی زیاد منجر به خشک‌شدن کانال می‌شود)

شرایط اولیه

- به عنوان شرط اولیه معمولاً دبی و عمق داده می‌شوند.
- دو شرط اولیه که معرفی می‌شوند باید مستقل از هم باشند.
  - نمی‌توان h و $\frac{\partial h}{\partial x}$ را معرفی کرد چون مستقل از هم نیستند.
  - نمی‌توان $\frac{\partial h}{\partial t}$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}$ را استفاده کرد چون در رابطه پیوستگی با هم ارتباط دارند.
- اگر اصطکاک زیاد باشد، اثر شرایط اولیه بتدریج از بین می‌رود و می‌توان از شرایط اولیه با دقت کم استفاده کرد. (شرایط اولیه فرضی)
  - بعد از مدتی خاطره شرایط اولیه (فرض) محو می‌شود.
  - باید حتماً از شروع حل زمانی بگذرد تا جواب‌ها قابل اعتماد باشند.

نمایش برداری معادلات در حالت ابقایی

- معادلات را درحالت ابقایی می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+S=0$$

$$U=\begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix} \qquad F=\begin{bmatrix} Q \\ Qu+gA\bar{y} \end{bmatrix} \qquad S=\begin{bmatrix} 0 \\ -gA\left(S_0-S_f\right) \end{bmatrix}$$

  - $A\bar{y}$ ممان سطح مقطع نسبت به سطح آزاد است

- برای واحد عرض:

$$U=\begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix} \qquad F=\begin{bmatrix} uh \\ u^2h+g\frac{h^2}{2} \end{bmatrix} \qquad S=\begin{bmatrix} 0 \\ -gh\left(S_0-S_f\right) \end{bmatrix}$$

- با نوشتن معادلات به این صورت می‌توان از ایده‌هایی که در یک‌بعدی گفته شده استفاده کرد.

روش Lax

❑ مشتق زمانی:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_i^n \cong \frac{U_i^{n+1} - \frac{1}{2}\left(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n\right)}{\Delta t}$$

❖ در کتاب .Cung et al بصورت زیر آمده است:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_i^n \cong \frac{U_i^{n+1} - \left(\alpha U_i^n + (1-\alpha)\dfrac{U_{i-1}^n + U_{i+1}^n}{2}\right)}{\Delta t}$$

❑ مشتق مکانی:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_i^n \cong \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

روش Lax

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_{i-1}^n + U_{i+1}^n\right) - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n\right) - S^*\Delta t$$

$$S^* = \frac{1}{2}\left(S_{i-1}^n + S_{i+1}^n\right)$$

❑ شرط پایداری:

$$1 \geq Cr > 0 \qquad Cr = \frac{\left(|u| \pm c\right)\Delta t}{\Delta x}$$

❑ برای مرزها باید از روش مشخصات استفاده شود.

روش Lax

- برای حالت غیرابقایی:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t}+\dfrac{\overbrace{A}^{D}}{B}\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial h}{\partial x}=0 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+g\dfrac{\partial h}{\partial x}+g\left(S_f-S_0\right)=0 \end{cases}$$

$$\varphi^{*}=\frac{1}{2}\left(\varphi_{i-1}^{n}+\varphi_{i+1}^{n}\right)$$

$$h_i^{n+1}=\frac{1}{2}\left(h_{i-1}^{n}+h_{i+1}^{n}\right)-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}D_i^{*}\left(u_{i+1}^{n}-u_{i-1}^{n}\right)-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}u_i^{*}\left(h_{i+1}^{n}-h_{i-1}^{n}\right)$$

$$u_i^{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_{i-1}^{n}+u_{i+1}^{n}\right)-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}u_i^{*}\left(u_{i+1}^{n}-u_{i-1}^{n}\right)-\frac{1}{2}g\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(h_{i+1}^{n}-h_{i-1}^{n}\right)+g\Delta t\left(S_0-S_f^{*}\right)$$

روش MacCormack

- مرحله پیش‌بینی (Predictor step):
  - ❖ روش پیش‌رو مرتبه اول برای مشتق‌های زمانی و مکانی

$$\bar{U}_i=U_i^{n}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_i^{n}-F_{i-1}^{n}\right)-S_i^{n}\Delta t$$

- مرحله اصلاح (Corrector step):
  - ❖ روش پس‌رو مرتبه اول برای مشتق‌های زمانی و مکانی

$$\bar{\bar{U}}_i=U_i^{n}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\bar{F}_{i+1}-\bar{F}_i\right)-\bar{S}_i\Delta t$$

- جواب نهایی: $U_i^{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(\bar{\bar{U}}_i^{n+1}+\bar{U}_i^{n+1}\right)$

- شرط پایداری: $1\geq Cr>0$ $\qquad Cr=\dfrac{\left(|u|\pm c\right)\Delta t}{\Delta x}$

روش Lambda

- روش‌های قبلی فقط برای یک رژیم جریان (زیربحرانی یا فوق بحرانی) بود.
- روش λ می‌تواند هر دو رژیم جریان را شبیه‌سازی نماید.
- معادلات در این روش به فرم λ تبدیل می‌شود و سپس بر اساس جهت خطوط مشخصه حل می‌شود. به این طریق بر اساس همان جهتی که اطلاعات می‌آیند منقطع‌سازی صورت می گیرد.

روش Lambda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t}+D\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial h}{\partial x}=0 & (I) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+g\dfrac{\partial h}{\partial x}+g\left(S_f-S_0\right)=0 & (II) \end{cases}$$

$$(I)+(II)\times\frac{c}{g}$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t}+(u+c)\frac{\partial h}{\partial x}\right]+\frac{c}{g}\left[\frac{\partial u}{\partial t}+(u+c)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=c\left(S_0-S_f\right)$$

$$u+c=\lambda^+$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t}+\lambda^+\frac{\partial h}{\partial x}\right]+\frac{c}{g}\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda^+\frac{\partial u}{\partial x}\right]=c\left(S_0-S_f\right)\quad (III)$$

روش Lambda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + D\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 & (I) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + g\dfrac{\partial h}{\partial x} + g\left(S_f - S_0\right) = 0 & (II) \end{cases}$$

$$(I) - (II) \times \frac{c}{g}$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} + (u-c)\frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{c}{g}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u-c)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = -c\left(S_0 - S_f\right)$$

$$u - c = \lambda^-$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda^-\frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{c}{g}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda^-\frac{\partial u}{\partial x}\right] = -c\left(S_0 - S_f\right) \quad (IV)$$

روش Lambda

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda^+\frac{\partial h}{\partial x}\right] + \frac{c}{g}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda^+\frac{\partial u}{\partial x}\right] = c\left(S_0 - S_f\right) \quad (III)$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda^-\frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{c}{g}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda^-\frac{\partial u}{\partial x}\right] = -c\left(S_0 - S_f\right) \quad (IV)$$

$$\frac{(III) + (IV)}{2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\lambda^+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^+ + \lambda^-\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^-\right] + \frac{1}{2}\frac{c}{g}\left[\lambda^+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^+ - \lambda^-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^-\right] = 0 \quad (V)$$

$$\frac{(III) - (IV)}{2}\frac{g}{c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{g}{c}\left[\lambda^+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^+ - \lambda^-\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^-\right] + \frac{1}{2}\left[\lambda^+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^+ + \lambda^-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^-\right] = g\left(S_0 - S_f\right) \quad (VI)$$

روش Lambda

- در معادلات به شکل λ، مقادیر با بالانویس + و − با جهت‌های متفاوت منقطع می‌شوند.
  - تفاضل محدود پس‌رو برای علامت مثبت
  - تفاضل محدود پیش‌رو برای علامت منفی
- مشتق‌های موجود در معادله هم با علامت مثبت و منفی مشخص شده که برای آنها جهت مناسب استفاده شود.
- روش λ بصورت دومرحله پیش‌بینی و اصلاح معادله را حل می کند.

روش Lambda

- مرحله پیش‌بینی:
  - مشتق مکانی برای علامت مثبت با مرتبه ۲ پس‌رو
  - مشتق مکانی برای علامت منفی با مرتبه ۱ پیش‌رو

$$f_x^+ = \frac{2f_i^n - 3f_{i-1}^n + f_{i-2}^n}{\Delta x} \qquad f_x^- = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x}$$

  - نتایج مرحله پیش‌بینی با بالانویس * مشخص می‌شوند:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_i^* - f_i^n}{\Delta t}$$

روش Lambda

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{+}+\lambda^{-}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-}\right]+\frac{1}{2}\frac{c}{g}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{+}-\lambda^{-}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-}\right]=0 \qquad (V)$$

$$\begin{aligned}h_i^{*}=h_i^{n}&-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\lambda^{+}\left(2h_i^{n}-3h_{i-1}^{n}+h_{i-2}^{n}\right)+\lambda^{-}\left(h_{i+1}^{n}-h_i^{n}\right)\right]\\&-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{c_i^{n}}{g}\left[\lambda^{+}\left(2u_i^{n}-3u_{i-1}^{n}+u_{i-2}^{n}\right)-\lambda^{-}\left(u_{i+1}^{n}-u_i^{n}\right)\right]\end{aligned} \qquad (VII)$$

روش Lambda

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{g}{c}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{+}-\lambda^{-}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-}\right]+\frac{1}{2}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{+}+\lambda^{-}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-}\right]=g\left(S_0-S_f\right) \qquad (VI)$$

$$\begin{aligned}u_i^{*}=u_i^{n}&-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{g}{c_i^{n}}\left[\lambda^{+}\left(2h_i^{n}-3h_{i-1}^{n}+h_{i-2}^{n}\right)-\lambda^{-}\left(h_{i+1}^{n}-h_i^{n}\right)\right]\\&-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\lambda^{+}\left(2u_i^{n}-3u_{i-1}^{n}+u_{i-2}^{n}\right)+\lambda^{-}\left(u_{i+1}^{n}-u_i^{n}\right)\right]\\&+g\Delta t\left(S_0-S_f^{n}\right)\end{aligned} \qquad (VIII)$$

روش Lambda

$$
\begin{aligned}
h_i^{*} = h_i^{n} &- \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\lambda^{+}\left(2h_i^{n} - 3h_{i-1}^{n} + h_{i-2}^{n}\right) + \lambda^{-}\left(h_{i+1}^{n} - h_i^{n}\right)\right] \\
&- \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{c_i^{n}}{g}\left[\lambda^{+}\left(2u_i^{n} - 3u_{i-1}^{n} + u_{i-2}^{n}\right) - \lambda^{-}\left(u_{i+1}^{n} - u_i^{n}\right)\right]
\end{aligned}
\qquad (VII)
$$

$$
\begin{aligned}
u_i^{*} = u_i^{n} &- \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{g}{c_i^{n}}\left[\lambda^{+}\left(2h_i^{n} - 3h_{i-1}^{n} + h_{i-2}^{n}\right) - \lambda^{-}\left(h_{i+1}^{n} - h_i^{n}\right)\right] \\
&- \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\lambda^{+}\left(2u_i^{n} - 3u_{i-1}^{n} + u_{i-2}^{n}\right) + \lambda^{-}\left(u_{i+1}^{n} - u_i^{n}\right)\right] \qquad (VIII) \\
&+ g\Delta t\left(S_0 - S_f^{n}\right)
\end{aligned}
$$

روش Lambda

❑ مرحله اصلاح:

❖ مشتق مکانی برای علامت مثبت با مرتبه ۱ پس‌رو

❖ مشتق مکانی برای علامت منفی با مرتبه ۲ پیش‌رو

$$
f_x^{+} = \frac{f_i^{*} - f_{i-1}^{*}}{\Delta x} \qquad\qquad f_x^{-} = \frac{-2f_i^{*} + 3f_{i+1}^{*} - f_{i+2}^{*}}{\Delta x}
$$

❖ نتایج مرحله اصلاح با بالانویس ** مشخص می‌شوند:

$$
\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_i^{**} - f_i^{n}}{\Delta t}
$$

روش Lambda

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{+}+\lambda^{-}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-}\right]+\frac{1}{2}\frac{c}{g}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{+}-\lambda^{-}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-}\right]=0 \qquad (V)$$

$$\begin{aligned} h_i^{**} = h_i^{n} &- \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\lambda^{+}\left(h_i^{*}-h_{i-1}^{*}\right)+\lambda^{-}\left(-2h_i^{*}+3h_{i+1}^{*}-h_{i+2}^{*}\right)\right] \\ &- \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{c_i^{*}}{g}\left[\lambda^{+}\left(u_i^{*}-u_{i-1}^{*}\right)-\lambda^{-}\left(-2u_i^{*}+3u_{i+1}^{*}-u_{i+2}^{*}\right)\right] \end{aligned} \qquad (IX)$$

روش Lambda

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{g}{c}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{+}-\lambda^{-}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{-}\right]+\frac{1}{2}\left[\lambda^{+}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{+}+\lambda^{-}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-}\right]= g\left(S_0-S_f\right) \qquad (VI)$$

$$\begin{aligned} u_i^{**} = u_i^{n} &- \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{g}{c_i^{*}}\left[\lambda^{+}\left(h_i^{*}-h_{i-1}^{*}\right)-\lambda^{-}\left(-2h_i^{*}+3h_{i+1}^{*}-h_{i+2}^{*}\right)\right] \\ &- \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\lambda^{+}\left(u_i^{*}-u_{i-1}^{*}\right)+\lambda^{-}\left(-2u_i^{*}+3u_{i+1}^{*}-u_{i+2}^{*}\right)\right] \\ &+ g\Delta t\left(S_0-S_f^{*}\right) \end{aligned} \qquad (X)$$

دانشگاه یزد
دانشکده مهندسی عمران
محمدرضا هادیان
پاییز ۱۳۹۹

روش Lambda

$$
\begin{aligned}
h_i^{**} = h_i^n &- \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\lambda^+\left(h_i^* - h_{i-1}^*\right) + \lambda^-\left(-2h_i^* + 3h_{i+1}^* - h_{i+2}^*\right)\right] \\
&- \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{c_i^*}{g}\left[\lambda^+\left(u_i^* - u_{i-1}^*\right) - \lambda^-\left(-2u_i^* + 3u_{i+1}^* - u_{i+2}^*\right)\right]
\end{aligned}
\qquad (IX)
$$

$$
\begin{aligned}
u_i^{**} = u_i^n &- \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{g}{c_i^*}\left[\lambda^+\left(h_i^* - h_{i-1}^*\right) - \lambda^-\left(-2h_i^* + 3h_{i+1}^* - h_{i+2}^*\right)\right] \\
&- \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\lambda^+\left(u_i^* - u_{i-1}^*\right) + \lambda^-\left(-2u_i^* + 3u_{i+1}^* - u_{i+2}^*\right)\right] \\
&+ g\Delta t\left(S_0 - S_f^*\right)
\end{aligned}
\qquad (X)
$$

روش Lambda

- ❑ جواب‌های نهایی برای گام زمانی جدید:

$$
h_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(h_i^* + h_i^{**}\right) \qquad u_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_i^* + u_i^{**}\right)
$$

- ❑ برای نقاط مرزی از روش مشخصات استفاده می‌شود.
- ❑ برای نقاط مجاور مرز می‌توان تفاضل محدود مرتبه اول را بجای مرتبه دوم در مراحل مربوطه استفاده نمود.
- ❑ شرط پایداری: $1 \geq Cr > 0$ $\qquad Cr = \dfrac{\left(|u| \pm c\right)\Delta t}{\Delta x}$

Any Question?