هیدرولیک محاسباتی

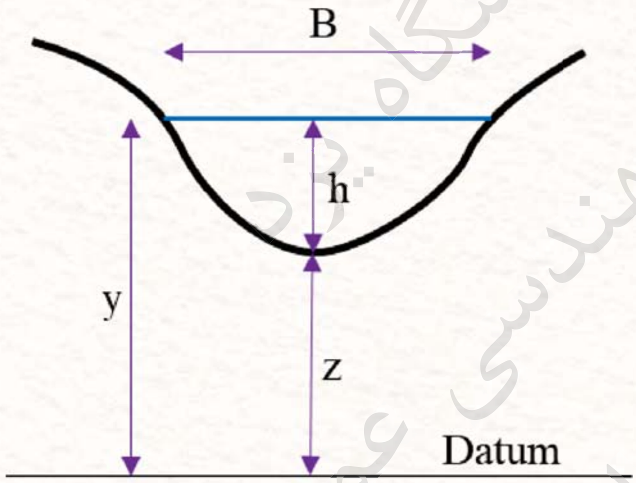
جریان یک بعدی غیردائمی در کانال‌ها

محمدرضا هادیان

دانشگاه یزد- دانشکده مهندسی عمران

معادلات یک بعدی Saint-Venant

- ❑ متغیرهای مورد استفاده در معادلات
  - ❖ متغیرهای هندسه کانال
    - ✓ عمق (h)
    - ✓ تراز سطح آب (y)
    - ✓ سطح مقطع (A)
  - ❖ متغیرهای جریان
    - ✓ سرعت (u)
    - ✓ دبی (Q)



- ❑ کلیه متغیرهای فوق تابع زمان و مکان (x,t) هستند.
- ❑ دو معادله و دو متغیر وابسته (از هر دسته یک متغیر) داریم.

معادلات یک بعدی Saint-Venant

❑ انتخاب متغیرها:

❖ معمولاً در جریان رودخانه و کانال‌ها Q را انتخاب می کنیم. چون هیدروگراف را داریم.

❖ برای کشتیرانی h مناسبتراست.

❖ برای کنترل سیل معمولاً y انتخاب می‌شود.

❖ از نظر عددی ترجیح می‌دهیم متغیری انتخاب شود که تغییرات کمتری داشته باشد.

❖ در رودخانه‌های باشیب زیاد، عمق انتخاب می‌شود.

❖ در رودخانه‌های با شیب کم، تراز سطح آب مناسب‌تر است.

معادلات یک بعدی Saint-Venant

❑ معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial t}=0$$

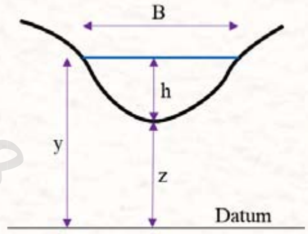
❑ معادله ممنتوم:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right)+gA\underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial x}-S_0\right)}_{\frac{\partial y}{\partial x}}+gAS_f=0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uQ)+gA\frac{\partial h}{\partial x}=gA\left(S_0-S_f\right)$$

شکل‌های مختلف معادلات حاکم

- Q و h (غیرخطی است)



$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t}+\dfrac{1}{B}\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{Q^2}{A}\right)+gA\dfrac{\partial h}{\partial x}+gA\left(S_f-S_0\right)=0 \end{cases}$$

$$A=A(h),B=B(h)$$

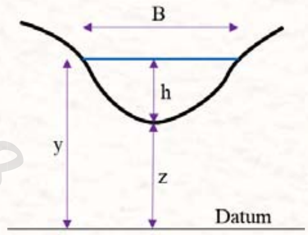
- Q و y

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}+\dfrac{1}{B}\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{Q^2}{A}\right)+gA\dfrac{\partial y}{\partial x}+gAS_f=0 \end{cases}$$

$$A=A(y),B=B(y)$$

شکل‌های مختلف معادلات حاکم

- u و h



$$\begin{cases} B\dfrac{\partial h}{\partial t}+A\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial A}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+g\left(\dfrac{\partial h}{\partial x}-S_0\right)+gS_f=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{\partial A}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x}+\left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_{h=cte}$$

- u و y

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}+\dfrac{A}{B}\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}+S_0\right)+\left.\dfrac{u}{B}\dfrac{\partial A}{\partial x}\right|_{y=cte}=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+g\dfrac{\partial y}{\partial x}+gS_f=0 \end{cases}$$

دانشگاه یزد
دانشکده مهندسی عمران
محمدرضا هادیانی
پاییز ۱۳۹۹

مراجع جهت مطالعه بیشتر

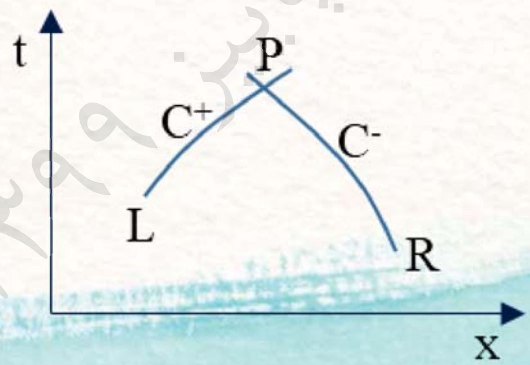
- Chaudhry, M. H. (2007). *Open-channel flow*: Springer Science & Business Media.
- Cunge, J. A., Holly, F. M., & Verwey, A. (1980). *Practical aspects of computational river hydraulics*: Pitman Advanced Publishing Program.
- Mahmood, K., Yevjevich, V. M., & Miller, W. A. (1975). *Unsteady flow in open channels*: Water Resources Publications.

روش مشخصات

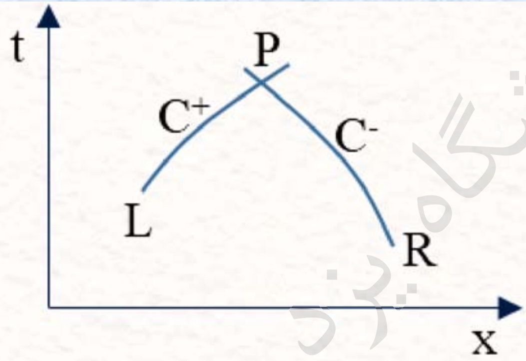
- تنوع روش‌های عددی برای حل معادلات
- نقش اساسی روش مشخصات(Characteristics Method)
  - روش مهم در درک نحوه اعمال شرایط مرزی

$$C^{+}\begin{cases}\dfrac{D}{Dt}(u+2c)=E\\[2mm]\dfrac{dx}{dt}=u+c\end{cases}\qquad C^{-}\begin{cases}\dfrac{D}{Dt}(u-2c)=E\\[2mm]\dfrac{dx}{dt}=u-c\end{cases}$$

$$E=g\left(S_0-S_f\right)$$



روش مشخصات



- با فرض معلوم بودن
  - موقعیت نقاط L، R و P در صفحه x-t
  - عمق و سرعت در نقاط L و R
  - عمق و سرعت در نقطه P ؟

$$C^+ : \quad \frac{D}{Dt}(u+2c)=E$$

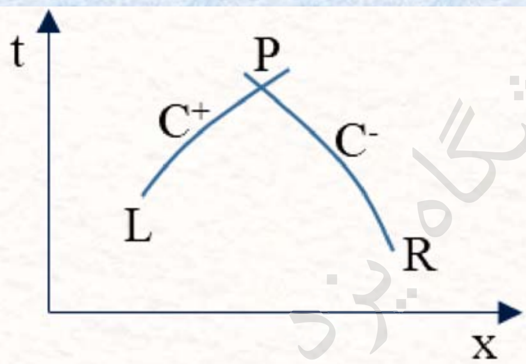
$$(u+2c)_P-(u+2c)_L=\bar{E}.\Delta t^+$$
$$=g\left(S_0-\overline{S_f}\right).\Delta t^+$$

$$S_f=\frac{Q^2n^2}{A^2R^{\frac{4}{3}}}=\frac{Q|Q|n^2}{A^2R^{\frac{4}{3}}}$$

$$\overline{S_f}=S_f\big|_L \quad \Rightarrow \quad \text{Linear}$$

$$\overline{S_f}=\frac{1}{2}\left(S_f\big|_L+S_f\big|_P\right) \quad \Rightarrow \quad \text{Non-Linear}$$

روش مشخصات



$$C^- : \quad \frac{D}{Dt}(u-2c)=E$$

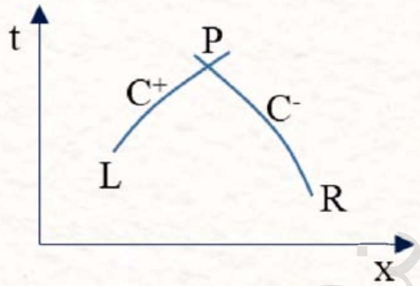
$$(u-2c)_P-(u-2c)_R=\bar{E}.\Delta t^-$$
$$=g\left(S_0-\overline{S_f}\right).\Delta t^-$$

$$\overline{S_f}=S_f\big|_R \quad \Rightarrow \quad \text{Linear}$$

$$\overline{S_f}=\frac{1}{2}\left(S_f\big|_R+S_f\big|_P\right) \quad \Rightarrow \quad \text{Non-Linear}$$

$$\begin{cases}(u+2c)_P-(u+2c)_L=g\left(S_0-\overline{S_f}\right).\Delta t^+\\(u-2c)_P-(u-2c)_R=g\left(S_0-\overline{S_f}\right).\Delta t^-\end{cases}\Rightarrow u_P,c_P$$

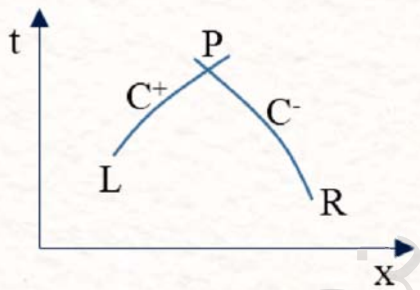
روش مشخصات



$$\begin{cases}(u+2c)_P-(u+2c)_L=g\left(S_0-\overline{S_f}\right).\Delta t^+\\(u-2c)_P-(u-2c)_R=g\left(S_0-\overline{S_f}\right).\Delta t^-\end{cases}\Rightarrow u_P,c_P$$

- ❑ برای حالت خطی با حل دستگاه جواب نهایی بدست می‌آید.
- ❑ برای حالت غیر خطی:
  - ❖ می‌توان ابتدا بصورت خطی حل کرد.
  - ❖ متوسط گرفت و مراحل را تکرار کرد تا جواب بدست آید.
- ❑ در عمل مختصات نقطه P مجهول است.

روش مشخصات

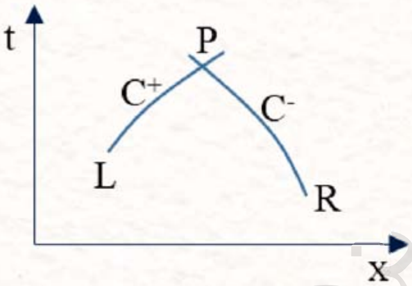


- ❑ در عمل مختصات نقطه P مجهول است.

$$C^+:\quad \frac{dx}{dt}=u+c \qquad \frac{x_P-x_L}{t_P-t_L}=\overline{u+c} \qquad \overline{u+c}=\begin{cases}(u+c)_L\\ \dfrac{(u+c)_L+(u+c)_P}{2}\end{cases}$$

$$C^-:\quad \frac{dx}{dt}=u-c \qquad \frac{x_P-x_R}{t_P-t_R}=\overline{u-c} \qquad \overline{u-c}=\begin{cases}(u-c)_R\\ \dfrac{(u-c)_R+(u-c)_P}{2}\end{cases}$$

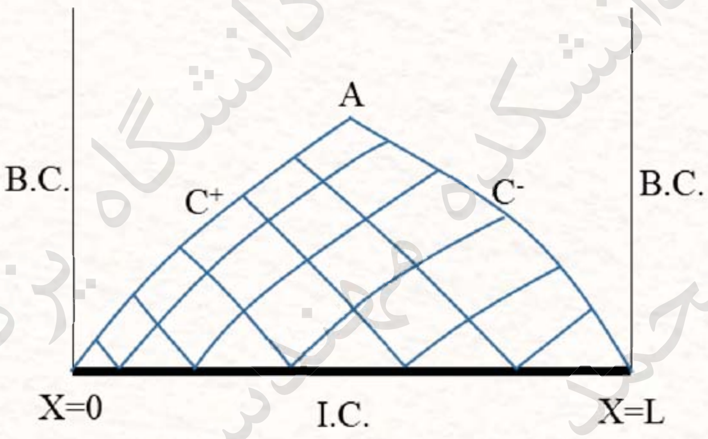
روش مشخصات



❑

$$\begin{cases} \dfrac{x_P - x_L}{t_P - t_L} = \overline{u+c} \\[2ex] \dfrac{x_P - x_R}{t_P - t_R} = \overline{u-c} \end{cases} \Rightarrow \quad x_P , t_P$$

روش مشخصات



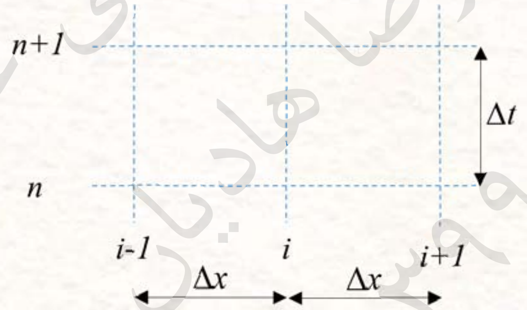
❑ نقطه A مستقل از شرایط مرزی بدست می‌آید.

❑ گره‌ها نامنظم و غیر یکنواخت است.

❑ هرجا گرادیان‌ها شدیدتر است، گره‌ها نزدیک‌تر می‌شود (بطور اتوماتیک با فیزیک مسأله تطابق دارد).

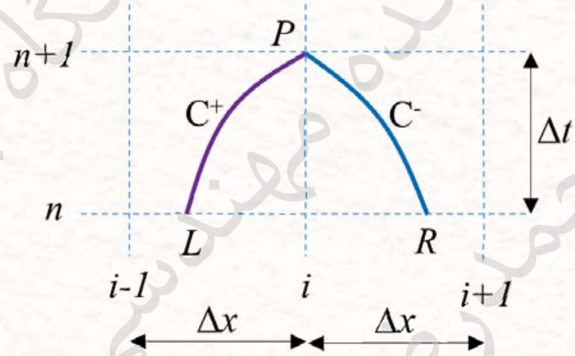
روش مشخصات با گره‌های منظم

- در عمل مشخصات هندسی کانال در نقاط (ایستگاه‌های) مشخصی معلوم است و لازم است موقعیت نقاط محاسباتی ثابت باشد.
- اکثراً در یک زمان مشخص موقعیت همه نقاط مورد نظر است و لازم است مقادیر برای زمان‌های مشخصی محاسبه شوند.



روش مشخصات با گره‌های منظم

- با فرض شبکه یکنواخت و جریان زیربحرانی:

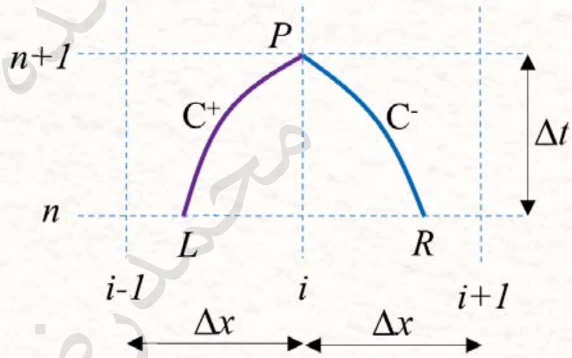


- با معلوم بودن موقعیت و مقادیر در L و R می‌توان مقادیر را در P که موقعیت آن مشخص است بدست آورد.

روش مشخصات با گره‌های منظم

❑ تعیین پارامترهای جریان در نقطه L با میانیابی بین i و i-1:

$$\frac{u_L - u_{i-1}}{u_i - u_{i-1}} = \frac{x_L - x_{i-1}}{\underbrace{x_i - x_{i-1}}_{\Delta x}}$$



$$\frac{u_i - u_L}{u_i - u_{i-1}} = \frac{x_i - x_L}{\underbrace{x_i - x_{i-1}}_{\Delta x}}$$

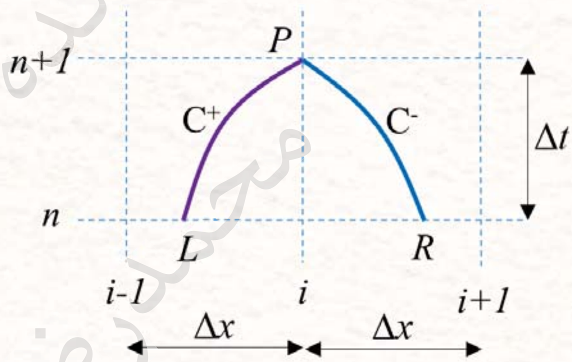
$$\frac{c_i - c_L}{c_i - c_{i-1}} = \frac{x_i - x_L}{\underbrace{x_i - x_{i-1}}_{\Delta x}}$$

$$\Rightarrow u_L, c_L$$

$$C^+ : \frac{dx}{dt} = u + c \qquad x_i - x_L = \begin{cases} (u+c)_L \, \Delta t \\ \dfrac{(u+c)_L + (u+c)_P}{2} \Delta t \end{cases}$$

روش مشخصات با گره‌های منظم

❑ تعیین پارامترهای جریان در نقطه R با میانیابی بین i و i+1:



$$\frac{u_R - u_i}{u_{i+1} - u_i} = \frac{x_R - x_i}{\underbrace{x_{i+1} - x_i}_{\Delta x}}$$

$$\frac{c_R - c_i}{c_{i+1} - c_i} = \frac{x_R - x_i}{\underbrace{x_{i+1} - x_i}_{\Delta x}}$$

$$\Rightarrow u_R, c_R$$

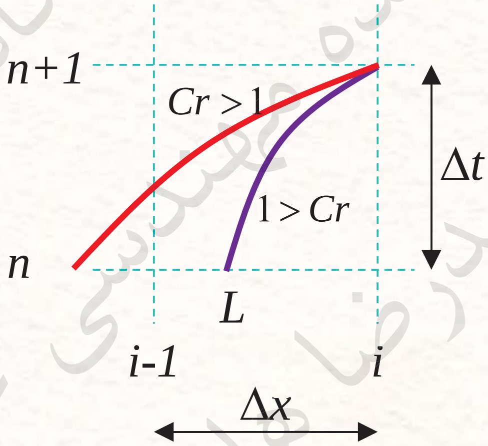
$$C^- : \frac{dx}{dt} = u - c \qquad x_R - x_i = \begin{cases} (u-c)_R \, \Delta t \\ \dfrac{(u-c)_R + (u-c)_P}{2} \Delta t \end{cases}$$

روش مشخصات با گره‌های منظم

- شرط همگرایی:

$$1 \geq Cr > 0$$

$$Cr = \frac{\left(|u| \pm c\right)\Delta t}{\Delta x}$$



- از نظر دقت بهتر است عدد کورانت نزدیک به یک باشد.
- عدد کورانت در نقاط مختلف متفاوت است.