هیدرولیک محاسباتی

معادله لاپلاس و پواسون

محمدرضا هادیان

دانشگاه یزد- دانشکده مهندسی عمران

معادله لاپلاس و پواسون

- معادله لاپلاس: $\nabla^2 f = 0$
- معادله پواسون: $\nabla^2 f = g$
  - معادله از نوع بیضوی است.
  - تابع زمان نیست.
- معادله لاپلاس و پواسون از پرکاربردترین معادلات هستند.
  - آب‌های زیرزمینی حالت ماندگار
  - تابع جریان و پتانسیل در جریان سیال ایده‌آل
  - الکترواستاتیک
  - تولید شبکه محاسباتی

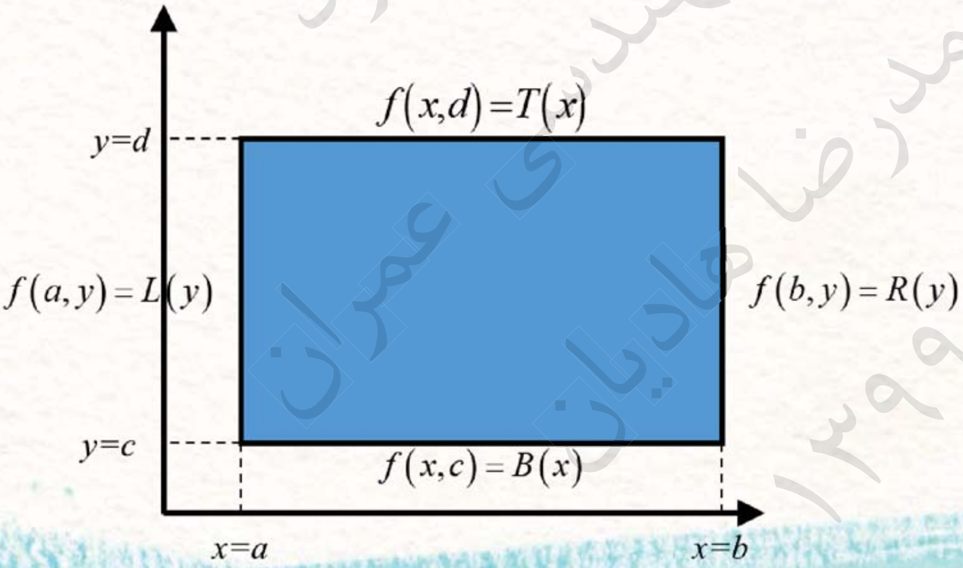
معادله لاپلاس

❑ معادله حاکم:

$$f_{xx}+f_{yy}=0 \qquad \nabla^2 f=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

$$b\geq x\geq a$$
$$d\geq y\geq c$$



$$\Delta x=\frac{b-a}{M-1}$$
$$i=1\cdots M$$

$$\Delta y=\frac{d-c}{N-1}$$
$$j=1\cdots N$$

روش ۵ نقطه‌ای

❑ روش مرکزی با مرتبه دقت ۲ برای جملات مشتق دوم:

$$f_{xx}\cong\frac{f_{i-1,j}-2f_{i,j}+f_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}$$

$$f_{yy}\cong\frac{f_{i,j-1}-2f_{i,j}+f_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}$$

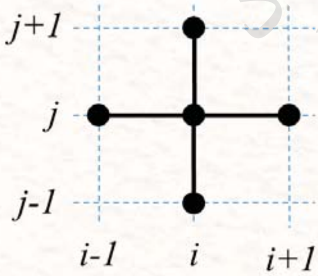
$$\frac{f_{i-1,j}-2f_{i,j}+f_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}+\frac{f_{i,j-1}-2f_{i,j}+f_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}=0$$

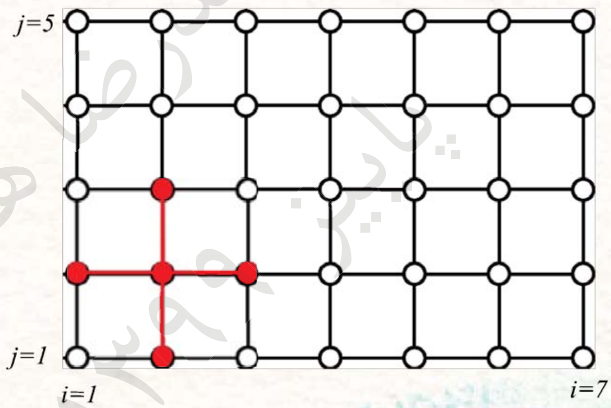
$$f_{i-1,j}-2f_{i,j}+f_{i+1,j}+\underbrace{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2}_{\beta}\left(f_{i,j-1}-2f_{i,j}+f_{i,j+1}\right)=0$$

روش ۵ نقطه‌ای

$$f_{i-1,j} + f_{i+1,j} - 2(1+\beta) f_{i,j} + \beta\left(f_{i,j-1} + f_{i,j+1}\right) = 0$$

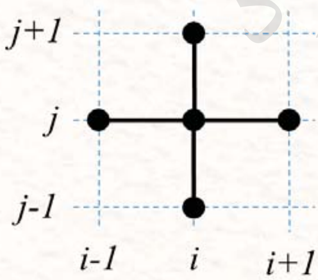
$$f_{i-1,j} + f_{i+1,j} - 2(1+\beta) f_{i,j} + \beta f_{i,j-1} + \beta f_{i,j+1} = 0$$

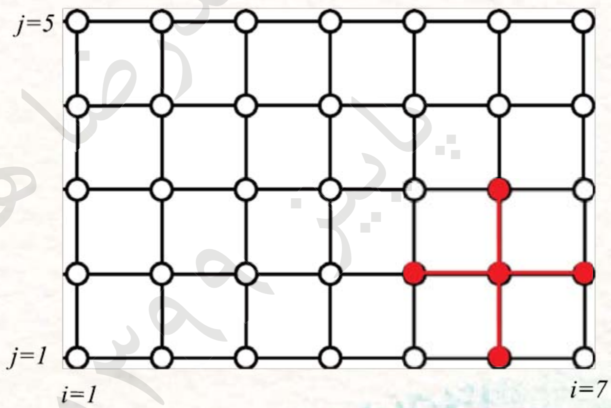




روش ۵ نقطه‌ای

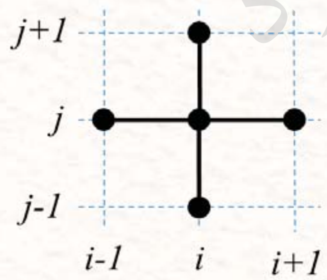
$$f_{i-1,j} + f_{i+1,j} - 2(1+\beta) f_{i,j} + \beta f_{i,j-1} + \beta f_{i,j+1} = 0$$

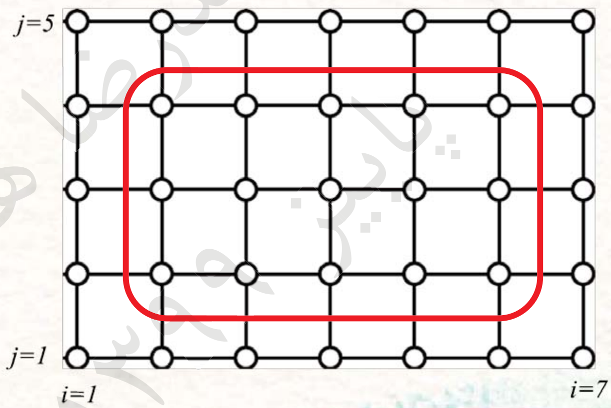




روش ۵ نقطه‌ای

$$f_{i-1,j}+f_{i+1,j}-2(1+\beta)f_{i,j}+\beta f_{i,j-1}+\beta f_{i,j+1}=0$$





روش ۹ نقطه‌ای

- روش مرکزی با مرتبه دقت ۴ برای جملات مشتق دوم:

$$f_{xx}\cong\frac{-f_{i-2,j}+16f_{i-1,j}-30f_{i,j}+16f_{i+1,j}-f_{i+2,j}}{12(\Delta x)^2}$$

$$f_{yy}\cong\frac{-f_{i,j-2}+16f_{i,j-1}-30f_{i,j}+16f_{i,j+1}-f_{i,j+2}}{12(\Delta y)^2}$$

$$\frac{-f_{i-2,j}+16f_{i-1,j}-30f_{i,j}+16f_{i+1,j}-f_{i+2,j}}{12(\Delta x)^2}+\frac{-f_{i,j-2}+16f_{i,j-1}-30f_{i,j}+16f_{i,j+1}-f_{i,j+2}}{12(\Delta y)^2}=0$$

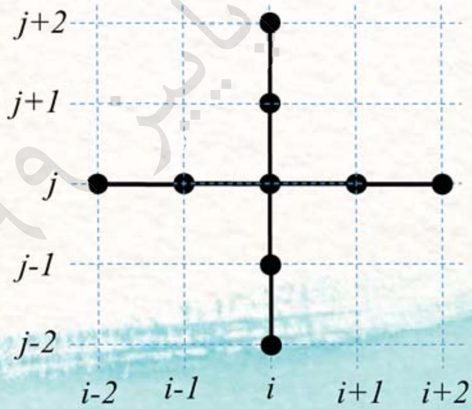
روش ۹ نقطه‌ای

$$-f_{i-2,j}+16f_{i-1,j}-30f_{i,j}+16f_{i+1,j}-f_{i+2,j}+$$

$$\underbrace{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2}_{\beta}\left(-f_{i,j-2}+16f_{i,j-1}-30f_{i,j}+16f_{i,j+1}-f_{i,j+2}\right)=0$$

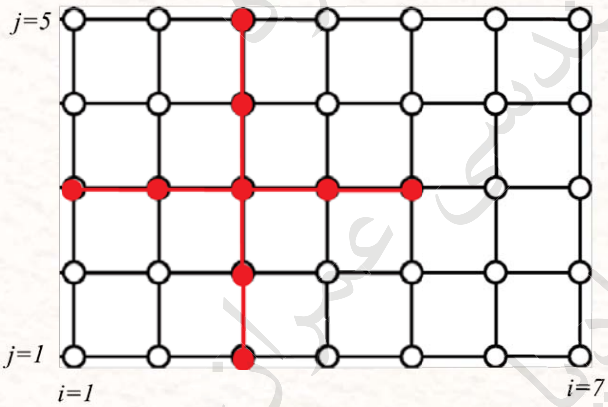
$$-f_{i-2,j}+16f_{i-1,j}+16f_{i+1,j}-f_{i+2,j}-30(1+\beta)f_{i,j}+$$
$$\beta\left(-f_{i,j-2}+16f_{i,j-1}+16f_{i,j+1}-f_{i,j+2}\right)=0$$

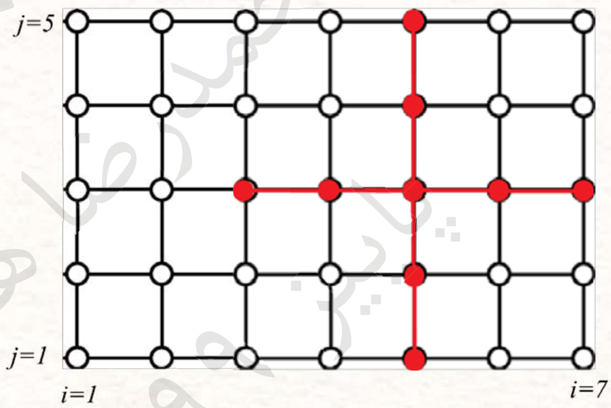
$$-f_{i-2,j}+16f_{i-1,j}+16f_{i+1,j}-f_{i+2,j}-30(1+\beta)f_{i,j}$$
$$-\beta f_{i,j-2}+16\beta f_{i,j-1}+16\beta f_{i,j+1}-\beta f_{i,j+2}=0$$



روش ۹ نقطه‌ای

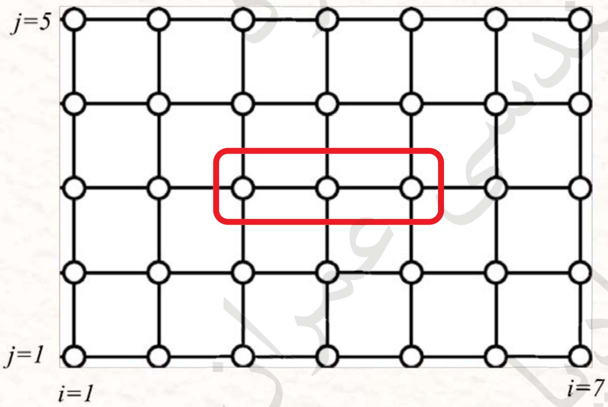
$$-f_{i-2,j}+16f_{i-1,j}+16f_{i+1,j}-f_{i+2,j}-30(1+\beta)f_{i,j}$$
$$-\beta f_{i,j-2}+16\beta f_{i,j-1}+16\beta f_{i,j+1}-\beta f_{i,j+2}=0$$

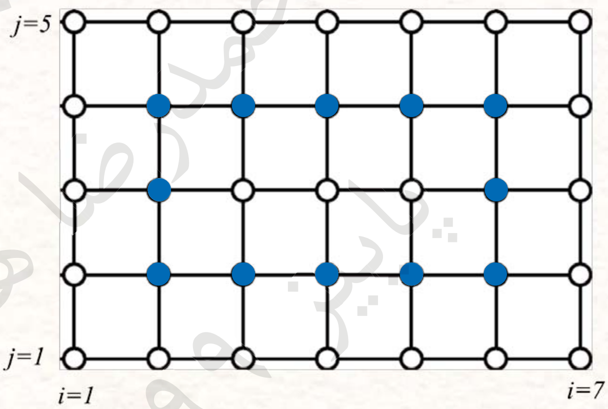




روش ۹ نقطه‌ای

$$-f_{i-2,j}+16f_{i-1,j}+16f_{i+1,j}-f_{i+2,j}-30(1+\beta)f_{i,j}$$
$$-\beta f_{i,j-2}+16\beta f_{i,j-1}+16\beta f_{i,j+1}-\beta f_{i,j+2}=0$$



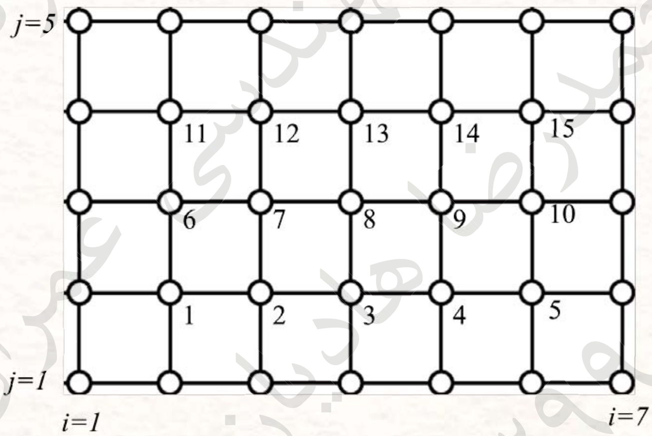


- برای نقاط آبی‌رنگ باید رابطه دیگری با همین دقت ولی بصورت پیش‌رو یا پس‌رو استفاده کرد.

روش ۵ نقطه‌ای

$$f_{i-1,j}+f_{i+1,j}-\underbrace{2(1+\beta)}_{\gamma}f_{i,j}+\beta f_{i,j-1}+\beta f_{i,j+1}=0$$

$$f_{i-1,j}+f_{i+1,j}-\gamma f_{i,j}+\beta f_{i,j-1}+\beta f_{i,j+1}=0$$



روش ۵ نقطه‌ای

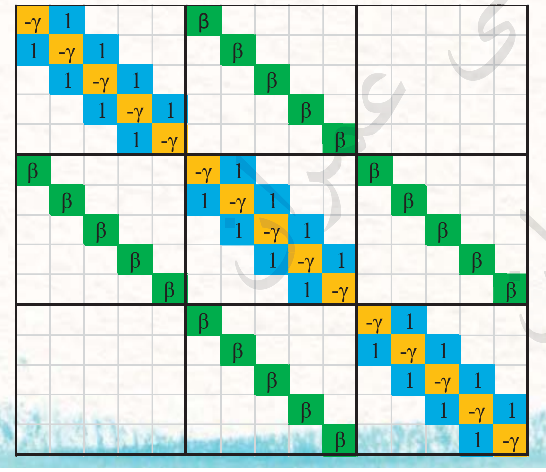
$$AX = b$$

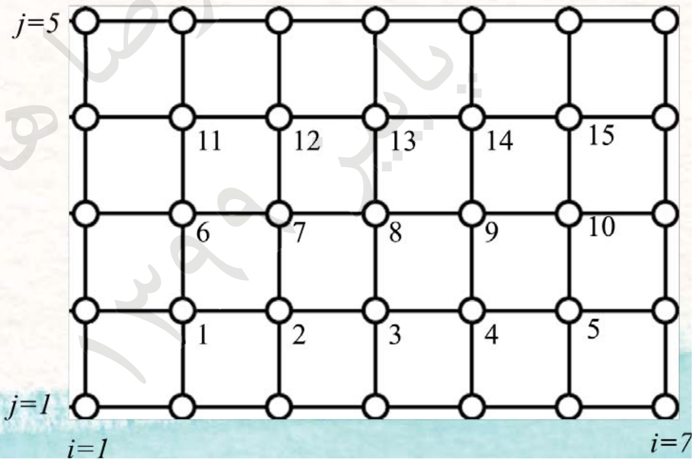
$$X = \left[x_1, x_2, \cdots, x_{15}\right]^T \qquad b = \left[b_1, b_2, \cdots, b_{15}\right]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} B_{5\times5} & \beta I_{5\times5} & 0_{5\times5} \\ \beta I_{5\times5} & B_{5\times5} & \beta I_{5\times5} \\ 0_{5\times5} & \beta I_{5\times5} & B_{5\times5} \end{bmatrix}$$

$$A_{15\times15} = Trid\left(\beta I_{5\times5}, B_{5\times5}, \beta I_{5\times5}\right)$$

$$B_{5\times5} = Trid\left(1, -\gamma, 1\right)$$





روش‌های تکراری برای حل دستگاه

$$f_{i-1,j} + f_{i+1,j} - \gamma f_{i,j} + \beta\left(f_{i,j-1} + f_{i,j+1}\right) = 0$$

❑ تکرار نقطه‌ای:

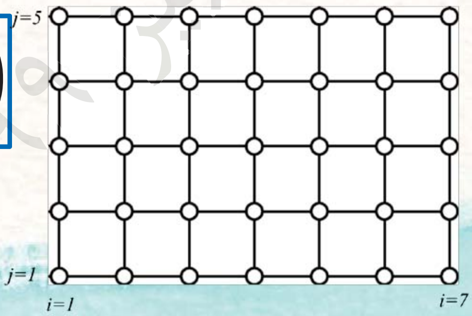
❖ Jacobi

$$f_{i,j} = \frac{1}{\gamma}\left(f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + \beta\left(f_{i,j-1} + f_{i,j+1}\right)\right)$$

$$\boxed{f_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{\gamma}\left(f_{i-1,j}^{k} + f_{i+1,j}^{k} + \beta\left(f_{i,j-1}^{k} + f_{i,j+1}^{k}\right)\right)}$$

❖ Gauss-Seidel

$$\boxed{f_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{\gamma}\left(f_{i-1,j}^{k+1} + f_{i+1,j}^{k} + \beta\left(f_{i,j-1}^{k+1} + f_{i,j+1}^{k}\right)\right)}$$



روش‌های تکراری برای حل دستگاه

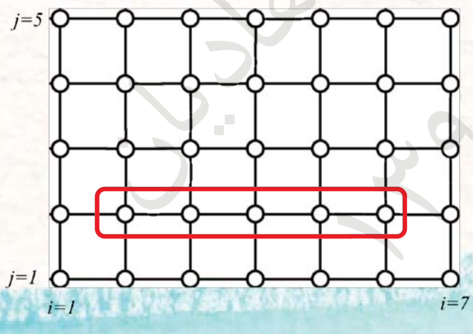
$$f_{i-1,j}+f_{i+1,j}-\gamma f_{i,j}+\beta\left(f_{i,j-1}+f_{i,j+1}\right)=0$$

❑ تکرار خطی:

❖ Jacobi

✓ سطر به سطر

$$\boxed{f_{i-1,j}^{k+1}-\gamma f_{i,j}^{k+1}+f_{i+1,j}^{k+1}=-\beta\left(f_{i,j-1}^{k}+f_{i,j+1}^{k}\right)}$$



روش‌های تکراری برای حل دستگاه

$$f_{i-1,j}+f_{i+1,j}-\gamma f_{i,j}+\beta\left(f_{i,j-1}+f_{i,j+1}\right)=0$$

❑ تکرار خطی:

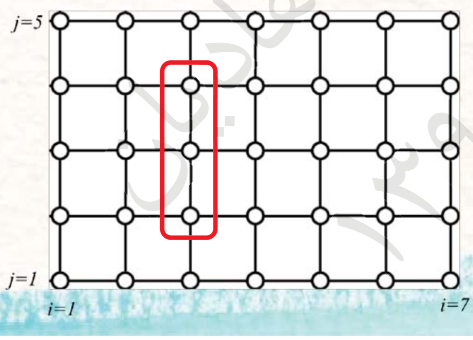
❖ Jacobi

✓ سطر به سطر

$$f_{i-1,j}^{k+1}-\gamma f_{i,j}^{k+1}+f_{i+1,j}^{k+1}=-\beta\left(f_{i,j-1}^{k}+f_{i,j+1}^{k}\right)$$

✓ ستون به ستون

$$\boxed{\beta f_{i,j-1}^{k+1}-\gamma f_{i,j}^{k+1}+\beta f_{i,j+1}^{k+1}=-\left(f_{i-1,j}^{k}+f_{i+1,j}^{k}\right)}$$



روش‌های تکراری برای حل دستگاه

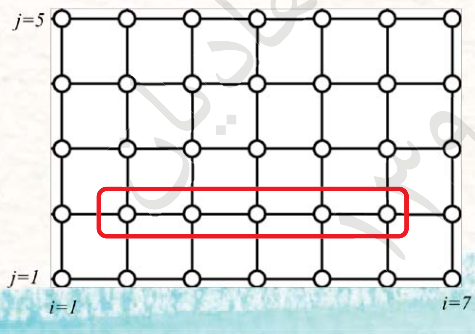
$$f_{i-1,j} + f_{i+1,j} - \gamma f_{i,j} + \beta\left(f_{i,j-1} + f_{i,j+1}\right) = 0$$

❑ تکرار خطی:

❖ Gauss-Seidel

✓ سطر به سطر

$$\boxed{f_{i-1,j}^{k+1} - \gamma f_{i,j}^{k+1} + f_{i+1,j}^{k+1} = -\beta\left(f_{i,j-1}^{k+1} + f_{i,j+1}^{k}\right)}$$



روش‌های تکراری برای حل دستگاه

$$f_{i-1,j} + f_{i+1,j} - \gamma f_{i,j} + \beta\left(f_{i,j-1} + f_{i,j+1}\right) = 0$$

❑ تکرار خطی:

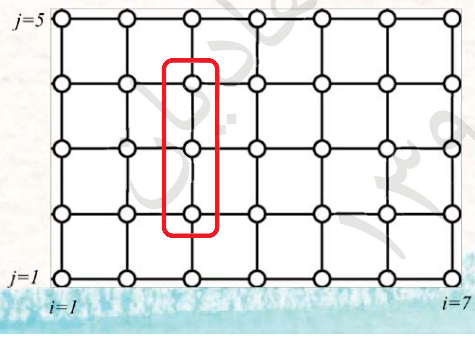
❖ Gauss-Seidel

✓ سطر به سطر

$$f_{i-1,j}^{k+1} - \gamma f_{i,j}^{k+1} + f_{i+1,j}^{k+1} = -\beta\left(f_{i,j-1}^{k+1} + f_{i,j+1}^{k}\right)$$

✓ ستون به ستون

$$\boxed{\beta f_{i,j-1}^{k+1} - \gamma f_{i,j}^{k+1} + \beta f_{i,j+1}^{k+1} = -\left(f_{i-1,j}^{k+1} + f_{i+1,j}^{k}\right)}$$



روش ADI

❑ در هر مرحله از سعی و خطا یک دور بصورت سطر به سطر و یک دور بصورت ستون به ستون معادلات حل می‌شوند.

❑ در هر دور یک دستگاه معادلات سه‌قطری بدست می‌آید:

$$f_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \gamma f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + f_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -\beta\left(f_{i,j-1}^{k} + f_{i,j+1}^{k}\right)$$

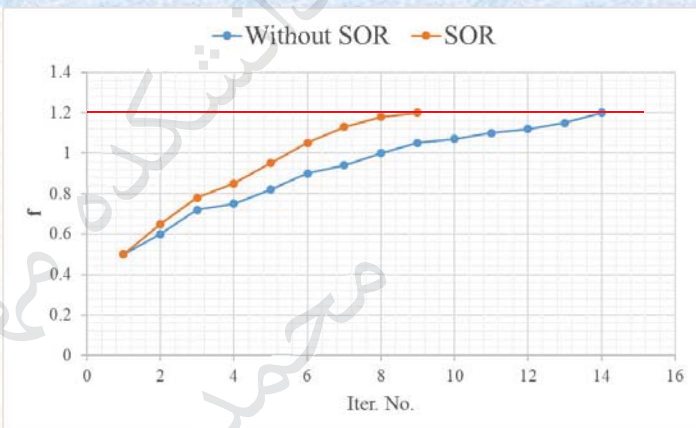
$$\beta f_{i,j-1}^{k+1} - \gamma f_{i,j}^{k+1} + \beta f_{i,j+1}^{k+1} = -\left(f_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} + f_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}\right)$$

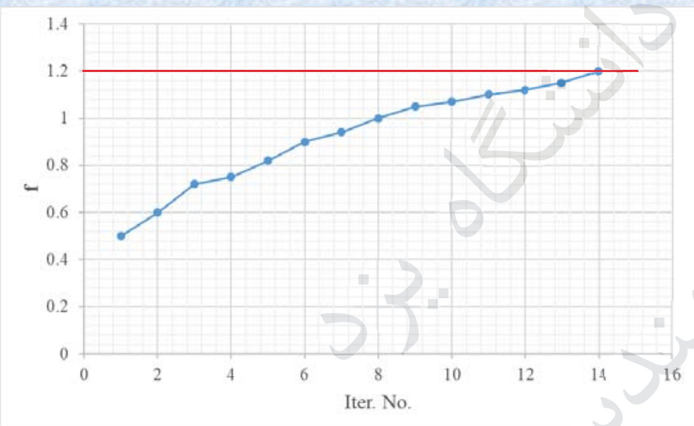
❖ با روش Gauss-Seidel:

$$f_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \gamma f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + f_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -\beta\left(f_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}} + f_{i,j+1}^{k}\right)$$

$$\beta f_{i,j-1}^{k+1} - \gamma f_{i,j}^{k+1} + \beta f_{i,j+1}^{k+1} = -\left(f_{i-1,j}^{k+1} + f_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}\right)$$

ضریب تخفیف





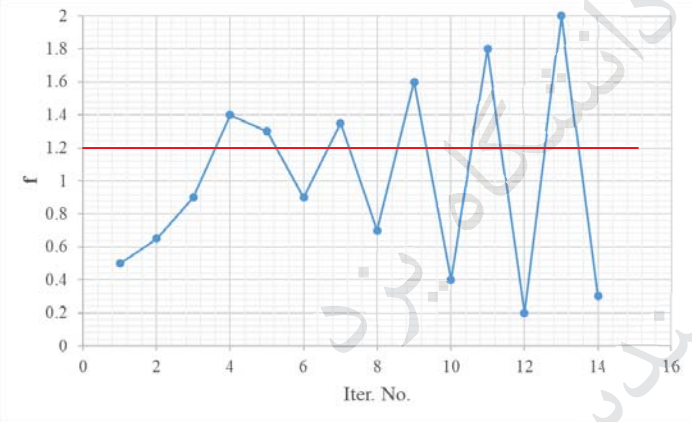
$$f^{k+1} = f^{k} + \omega\Delta f, \quad 2 > \omega > 1$$

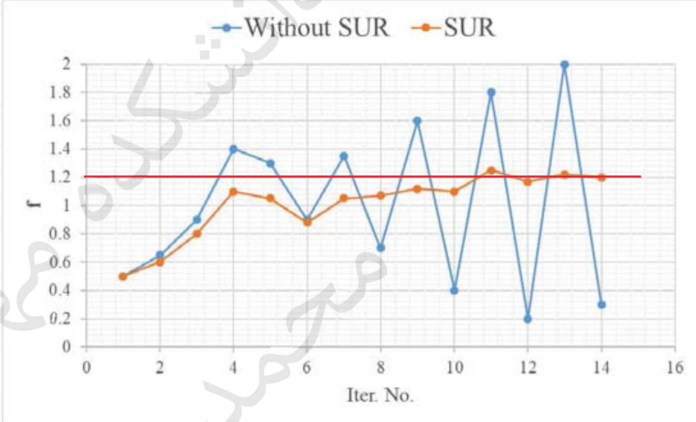
$$f^{k+1} = f^{k} + \Delta f$$

❑ ضریب فوق تخفیف (Successive Over Relaxation)

❑ برای تسریع همگرایی استفاده می‌شود.

ضریب تخفیف





$$f^{k+1} = f^{k} + \Delta f \qquad\qquad f^{k+1} = f^{k} + \omega \Delta f\,, \quad 1 > \omega > 0$$

- ❑ ضریب زیر تخفیف (Successive Under Relaxation)
- ❑ برای تضمین همگرایی استفاده می‌شود.

روش‌های تکراری همراه با ضریب فوق تخفیف

- ❑ تکرار نقطه‌ای:

❖ Jacobi

$$f_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{\gamma}\left(f_{i-1,j}^{k} + f_{i+1,j}^{k} + \beta\left(f_{i,j-1}^{k} + f_{i,j+1}^{k} \right)\right)$$

$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^{k} + \underbrace{- f_{i,j}^{k} + \frac{1}{\gamma}\left(f_{i-1,j}^{k} + f_{i+1,j}^{k} + \beta\left(f_{i,j-1}^{k} + f_{i,j+1}^{k} \right)\right)}_{\Delta f}$$

$$f_{i,j}^{k+1} = f_{i,j}^{k} + \frac{\omega}{\gamma}\left(f_{i-1,j}^{k} + f_{i+1,j}^{k} + \beta\left(f_{i,j-1}^{k} + f_{i,j+1}^{k} \right) - \gamma f_{i,j}^{k} \right)$$

$$\boxed{f_{i,j}^{k+1} = (1-\omega)\, f_{i,j}^{k} + \frac{\omega}{\gamma}\left(f_{i-1,j}^{k} + f_{i+1,j}^{k} + \beta\left(f_{i,j-1}^{k} + f_{i,j+1}^{k} \right)\right)}$$

❖ Gauss-Seidel

$$\boxed{f_{i,j}^{k+1} = (1-\omega)\, f_{i,j}^{k} + \frac{\omega}{\gamma}\left(f_{i-1,j}^{k+1} + f_{i+1,j}^{k} + \beta\left(f_{i,j-1}^{k+1} + f_{i,j+1}^{k} \right)\right)}$$

مقدار بهینه ضریب فوق تخفیف

❑ برای میدان مستطیلی، با شرایط مرزی دیریکله با شبکه یکنواخت:

$$\omega_{opt} = \frac{2-\sqrt{1-q}}{q}$$

$$q = \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{M-1}\right) + \beta\cos\left(\frac{\pi}{N-1}\right)}{1+\beta} \right)^2$$

❑ بطور کلی روش جامعی برای تعیین ضریب تخفیف بهینه نداریم و عمدتاً بصورت تجربی مواردی بصورت راهنما داده شده است.

روش‌های تکراری همراه با ضریب فوق تخفیف

❑ تکرار خطی:

❖ Jacobi

✓ سطر به سطر

$$\omega f_{i-1,j}^{k+1} - \gamma f_{i,j}^{k+1} + \omega f_{i+1,j}^{k+1} = -\gamma(1-\omega) f_{i,j}^{k} - \omega\beta\left(f_{i,j-1}^{k} + f_{i,j+1}^{k} \right)$$

✓ ستون به ستون

$$\beta\omega f_{i,j-1}^{k+1} - \gamma f_{i,j}^{k+1} + \beta\omega f_{i,j+1}^{k+1} = -\gamma(1-\omega) f_{i,j}^{k} - \omega\left(f_{i-1,j}^{k} + f_{i+1,j}^{k} \right)$$

روش‌های تکراری همراه با ضریب فوق تخفیف

- تکرار خطی:
  - Gauss-Seidel
    - سطر به سطر

$$\omega f_{i-1,j}^{k+1}-\gamma f_{i,j}^{k+1}+\omega f_{i+1,j}^{k+1}=-\gamma(1-\omega)\,f_{i,j}^{k}-\omega\beta\left(f_{i,j-1}^{k+1}+f_{i,j+1}^{k}\right)$$

- ستون به ستون

$$\beta\omega f_{i,j-1}^{k+1}-\gamma f_{i,j}^{k+1}+\beta\omega f_{i,j+1}^{k+1}=-\gamma(1-\omega)\,f_{i,j}^{k}-\omega\left(f_{i-1,j}^{k+1}+f_{i+1,j}^{k}\right)$$

روش ADI همراه با ضریب فوق تخفیف

$$\omega f_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}-\gamma f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}+\omega f_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}=-\gamma(1-\omega)\,f_{i,j}^{k}-\beta\omega\left(f_{i,j-1}^{k}+f_{i,j+1}^{k}\right)$$

$$\omega\beta f_{i,j-1}^{k+1}-\gamma f_{i,j}^{k+1}+\omega\beta f_{i,j+1}^{k+1}=-\gamma(1-\omega)\,f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}-\omega\left(f_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}+f_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}\right)$$

- با روش Gauss-Seidel:

$$\omega f_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}-\gamma f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}+\omega f_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}=-\gamma(1-\omega)\,f_{i,j}^{k}-\beta\omega\left(f_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}}+f_{i,j+1}^{k}\right)$$

$$\omega\beta f_{i,j-1}^{k+1}-\gamma f_{i,j}^{k+1}+\omega\beta f_{i,j+1}^{k+1}=-\gamma(1-\omega)\,f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}-\omega\left(f_{i-1,j}^{k+1}+f_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}\right)$$

دانشگاه یزد دانشکده مهندسی عمران محمدرضا هادیان پاییز ۱۳۹۹

Any Question?