هیدرولیک محاسباتی

پخش و پراکنش عددی
مطالعه کفایت ریزی شبکه
معادله دو بعدی جابجایی

محمدرضا هادیان

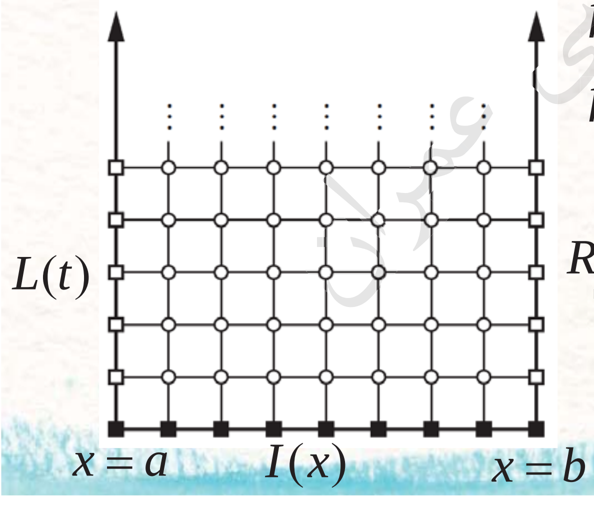
دانشگاه یزد- دانشکده مهندسی عمران

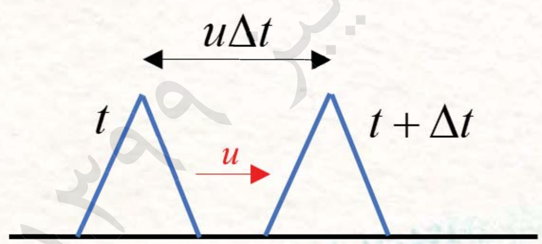
معادله یک بعدی جابجایی غیرماندگار

- معادله حاکم: $b \geq x \geq a$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial t} + u\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad f_t + uf_x = 0$

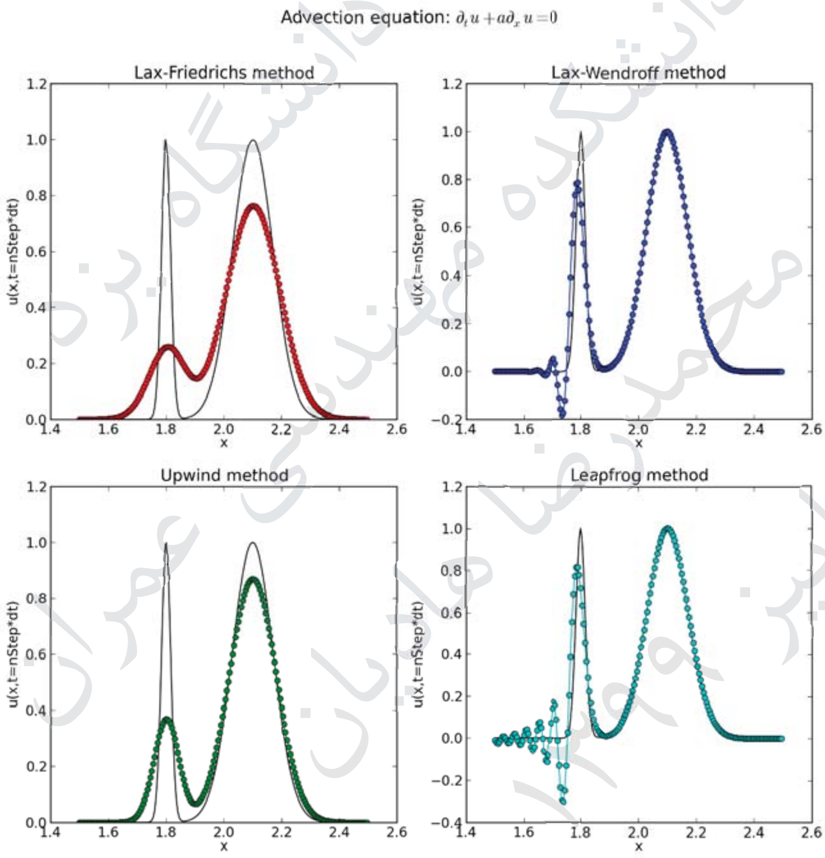
- شرط اولیه: $f(x,0) = I(x)$

- شرایط مرزی (دیریکله): $f(a,t) = L(t)$ ، $f(b,t) = R(t)$





Numerical Diffusion/Dispersion

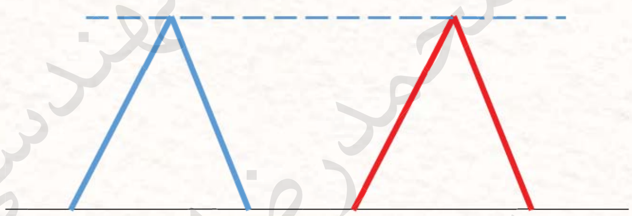


Numerical Diffusion/Dispersion

❑ معادله جابجایی خالص (Pure Convection)

❖ موج بدون تغییر در شکل و دامنه جابجا می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

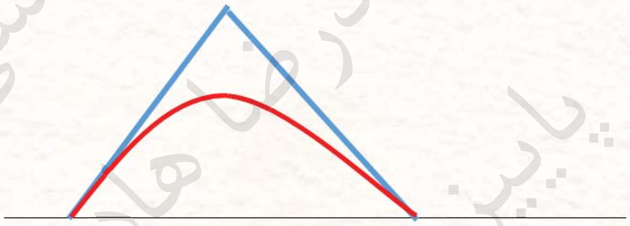


دانشگاه یزد دانشکده مهندسی عمران محمدرضا هادیان پاییز ۱۳۹۹

Numerical Diffusion/Dispersion

- معادله پخش خالص (Pure Diffusion)
  - در طبیعت باعث از بین بردن اختلافات می شود.
  - شکل و دامنه موج تغییر می کند.
  - اگر شکل موج سینوسی نباشد، به سمت سینوسی تغییر می کند.

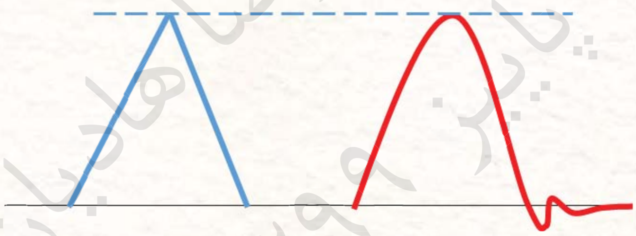
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$



Numerical Diffusion/Dispersion

- معادله پراکنش خالص (Pure Dispersion)
  - شکل موجه تغییر می کند ولی دامنه موج تغییر نمی کند.
  - اگر موج سینوسی نباشد، در طول زمان بصورت موج‌های سینوسی درآمده و چون سرعت انتشار آنها فرق می کند، از هم جدا می‌شوند.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \beta \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$



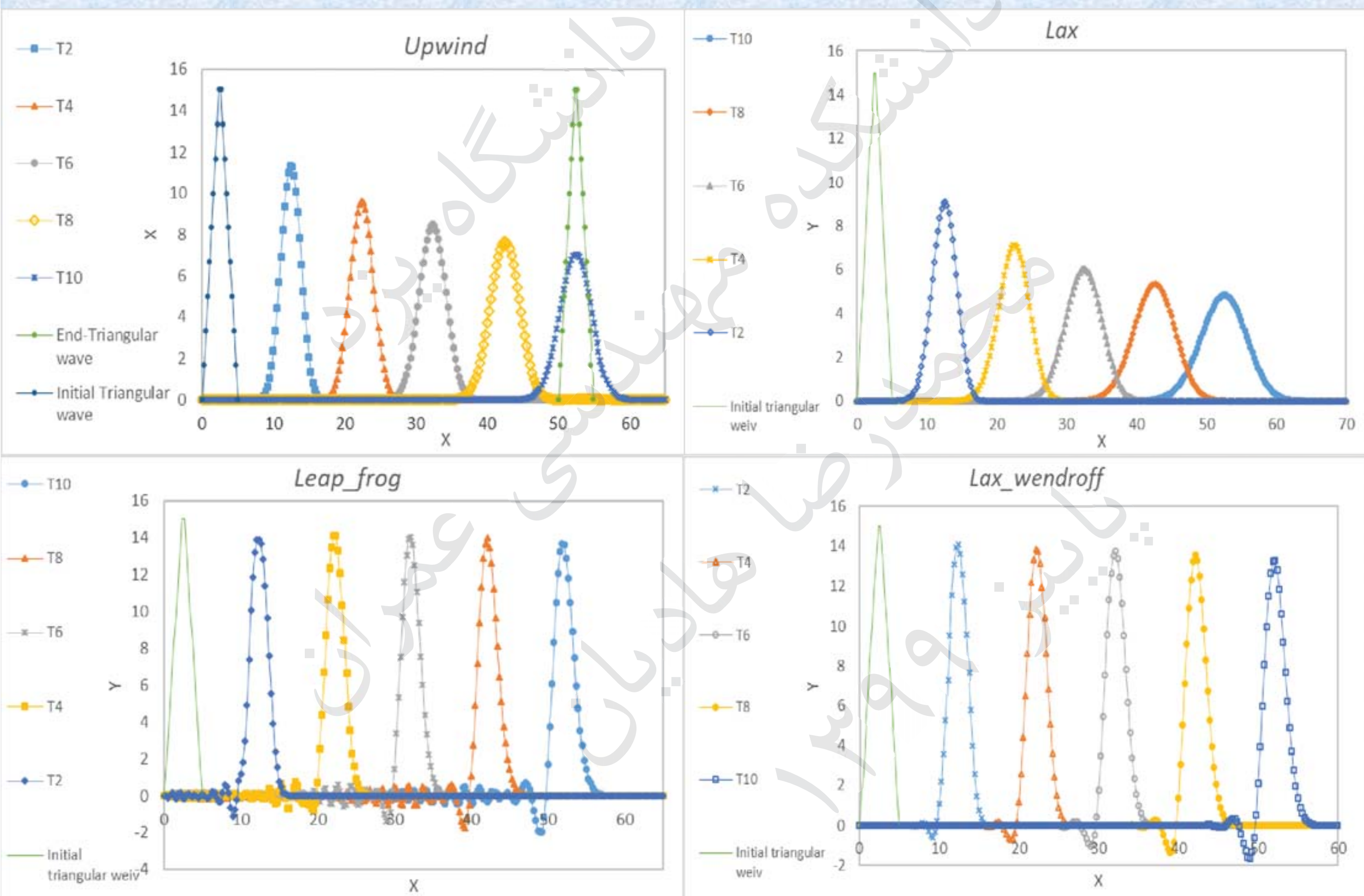
Numerical Diffusion/Dispersion

- پس از نوشتن MEPDE اگر بزرگترین ترم خطا شامل مشتق از مرتبه دوم (زوج)باشد: پخش عددی (Numerical Diffusion)
- پس از نوشتن MEPDE اگر بزرگترین ترم خطا شامل مشتق از مرتبه سوم (فرد)باشد: پراکنش عددی (Numerical Dispersion)

- روش Upwind: $f_i^{n+1} = Cf_{i-1}^{n} + (1-C)\,f_i^{n}$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + \underbrace{u\frac{\Delta x}{2}(1-u)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}_{\text{Numerical Diffusion}} + \underbrace{u\frac{(\Delta x)^2}{6}\left(3u-2u^2-1\right)\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}}_{\text{Numerical Dispersion}} + \cdots = 0$$

Numerical Diffusion/Dispersion



پخش مصنوعی

- گاهی در حل عددی معادله ناپایداری پیش می‌آید و برای پایدار کردن حل ترمی را بصورت پخش بصورت مصنوعی وارد می کنند که به آن پخش مصنوعی (Artificial Diffusion) می گویند.
  - به ضریب این پخش مصنوعی، لزجت مصنوعی میگویند.
- پخش مصنوعی باید مقدار حداقلی و صرفاً در حدی باشد که حل عددی را از ناپایداری درآورد.

Grid Study

- هدف رسیدن به جواب‌های مستقل از اندازه شبکه است.
- هدف بدست آوردن جواب‌های روش عددی است که با ریزتر شدن بیشتر اندازه شبکه، تغییری در جواب‌ها ایجاد نشود.
- نیازی به داشتن جواب تحلیلی، آزمایشگاهی یا عددی دیگر نیست.
- بهتر است هر گونه مقایسه با جواب‌های شاهد بعد از رسیدن به ابعاد مستقل از اندازه شبکه انجام شود که باعث خطا نشود.

دانشگاه یزد
دانشکده مهندسی عمران
محمدرضا هادیان
پاییز ۱۳۹۹

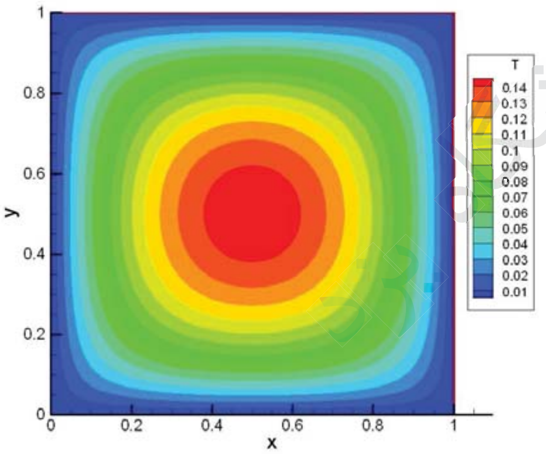
Grid Study

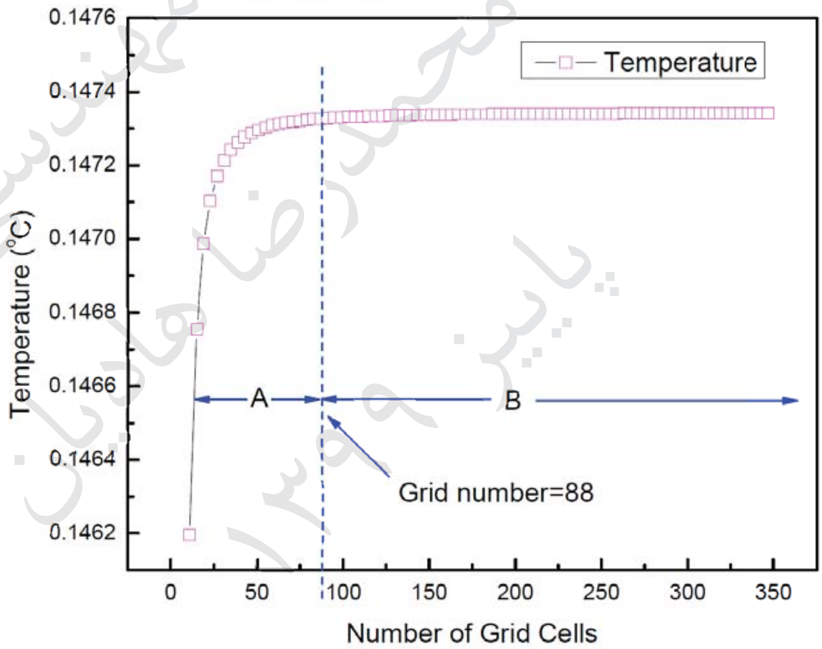
- مقدار یا توزیع پارامتری که در مسأله اهمیت دارد مبنای مقایسه قرار می گیرد.
- از یک شبکه درشت محاسبات شروع شده و برای ریزشدگی‌های مختلف مقدار پارامتر یا توزیع آن با شبکه درشت‌تر قبلی مقایسه می‌شود.
- با رسیدن به اختلاف قابل قبول بین دو شبکه، شبکه ریزتر به عنوان جواب‌های مستقل از اندازه شبکه درنظر گرفته می شود.

Grid Study

- مقدار یا توزیع پارامتری که در مسأله اهمیت دارد مبنای مقایسه قرار می گیرد.
- از یک شبکه درشت محاسبات شروع شده و برای ریزشدگی‌های مختلف مقدار پارامتر یا توزیع آن با شبکه درشت‌تر قبلی مقایسه می‌شود.
- با رسیدن به اختلاف قابل قبول بین دو شبکه، شبکه ریزتر به عنوان جواب‌های مستقل از اندازه شبکه درنظر گرفته می شود.

Grid Study





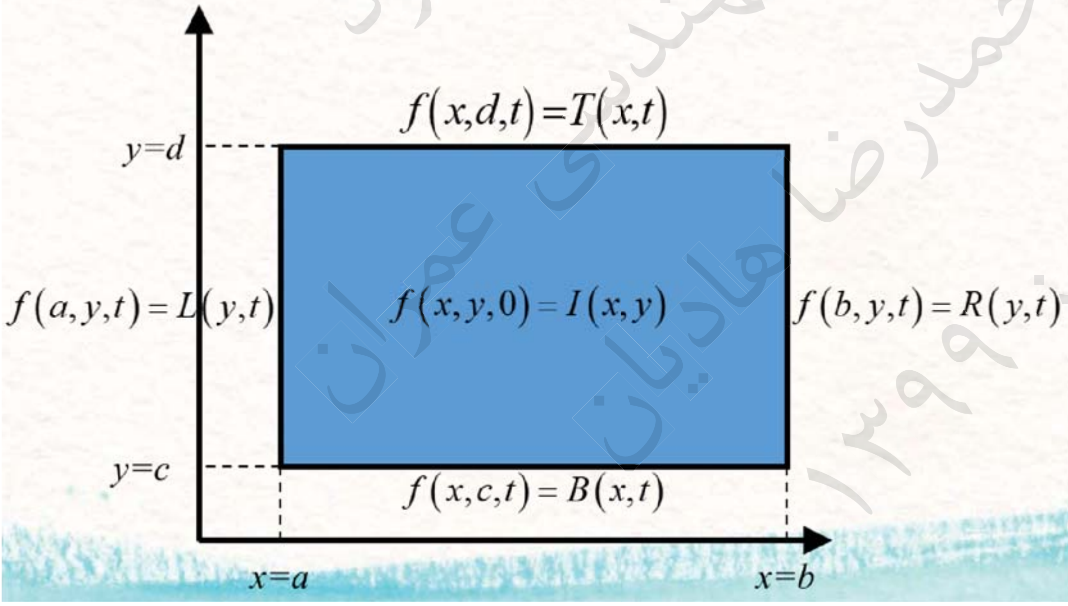
معادله یک بعدی جابجایی غیرماندگار

- معادله حاکم:

$$f_t + uf_x + vf_y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$b \geq x \geq a$$
$$d \geq y \geq c$$



$$\Delta x = \frac{b-a}{M-1}$$
$$i = 1 \cdots M$$

$$\Delta y = \frac{d-c}{N-1}$$
$$j = 1 \cdots N$$

روش upwind

❑ انتخاب فرمول مناسب برای مشتق‌ها

$$f_t + uf_x + vf_y = 0$$

$$f_t\Big|_{i,j}^{n} + u\, f_x\Big|_{i,j}^{n} + v\, f_y\Big|_{i,j}^{n} = 0$$

❖ روش پیش‌رو مرتبه یک برای مشتق زمانی

$$f_t\Big|_{i,j}^{n} \cong \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n}}{\Delta t}$$

❖ روش پس‌رو برای مشتق مکانی (با فرض مثبت بودن مقادیر u و v، جهت بالادست همان جهت پس‌رو می‌شود.

$$f_x\Big|_{i,j}^{n} \cong \frac{f_{i,j}^{n} - f_{i-1,j}^{n}}{\Delta x} \qquad f_y\Big|_{i,j}^{n} \cong \frac{f_{i,j}^{n} - f_{i,j-1}^{n}}{\Delta y}$$

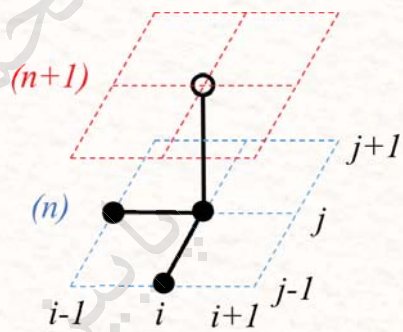
روش upwind

$$\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n}}{\Delta t} + u\frac{f_{i,j}^{n} - f_{i-1,j}^{n}}{\Delta x} + v\frac{f_{i,j}^{n} - f_{i,j-1}^{n}}{\Delta y} = 0$$

$$C_x = u\frac{\Delta t}{\Delta x} \qquad C_y = v\frac{\Delta t}{\Delta y}$$

$$f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^{n} + C_x\left(f_{i-1,j}^{n} - f_{i,j}^{n}\right) + C_y\left(f_{i,j-1}^{n} - f_{i,j}^{n}\right)$$

$$\boxed{f_{i,j}^{n+1} = C_x f_{i-1,j}^{n} + C_y f_{i,j-1}^{n} - \left(C_x + C_y - 1\right) f_{i,j}^{n}}$$



❑ حالت خاص: $\Delta x = \Delta y,\ u = v \Rightarrow C_x = C_y$

$$f_{i,j}^{n+1} = Cf_{i-1,j}^{n} + Cf_{i,j-1}^{n} + \left(1 - 2C\right) f_{i,j}^{n}$$

روش upwind

❑ شرط پایداری: $1 \geq C_x + C_y > 0$

❖ برای حالت خاص: $\frac{1}{2} \geq C > 0$

روش Crank-Nicolson

❑ انتخاب فرمول مناسب برای مشتق‌ها $f_t + uf_x + vf_y = 0$

$$f_t\Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u\, f_x\Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + v\, f_y\Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

❖ روش مرکزی برای مشتق زمانی

$$f_t\Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n}}{\Delta t}$$

❖ روش مرکزی برای مشتق مکانی

$$f_x\Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i+1,j}^{n} - f_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x} + \frac{f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x}\right)$$

$$f_y\Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i,j+1}^{n} - f_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y} + \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - f_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y}\right)$$

روش Crank-Nicolson

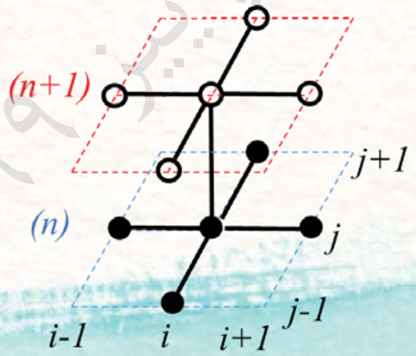
$$\frac{f_{i,j}^{n+1}-f_{i,j}^{n}}{\Delta t}+\frac{u}{2}\left(\frac{f_{i+1,j}^{n}-f_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}+\frac{f_{i+1,j}^{n+1}-f_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x}\right)$$

$$+\frac{v}{2}\left(\frac{f_{i,j+1}^{n}-f_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}+\frac{f_{i,j+1}^{n+1}-f_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y}\right)=0$$

$$C_x=u\frac{\Delta t}{\Delta x}\qquad C_y=v\frac{\Delta t}{\Delta y}$$

$$-C_x f_{i-1,j}^{n+1}-C_y f_{i,j-1}^{n+1}+4f_{i,j}^{n+1}+C_x f_{i+1,j}^{n+1}+C_y f_{i,j+1}^{n+1}=$$

$$C_x f_{i-1,j}^{n}+C_y f_{i,j-1}^{n}+4f_{i,j}^{n}-C_x f_{i+1,j}^{n}-C_y f_{i,j+1}^{n}$$



روش Crank-Nicolson

- روش پایدار نامشروط است.
- مرتبه دقت: $E=O\left\{(\Delta x)^2,(\Delta y)^2,(\Delta t)^2\right\}$
- ماتریس ضرائب دارای پنج قطر غیر صفر است (پنج‌قطری نیست).
- حوزه حل‌پذیری: $1\geq C_x>0,\ \ 1\geq C_y>0$

روش (3,3) فشرده

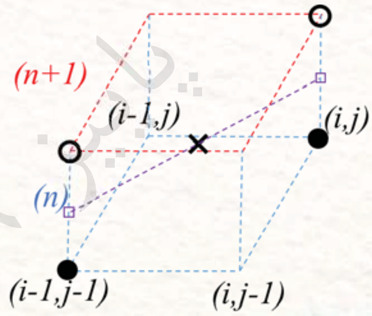
- انتخاب فرمول مناسب برای مشتق‌ها

$$f_t + uf_x + vf_y = 0$$

$$f_t\Big|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + u\, f_x\Big|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + v\, f_y\Big|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

❖ روش مرکزی برای مشتق زمانی

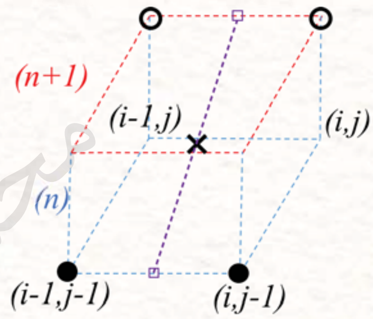
$$f_t\Big|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i-1,j-1}^{n+1} - f_{i-1,j-1}^{n}}{\Delta t} + \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n}}{\Delta t}\right)$$



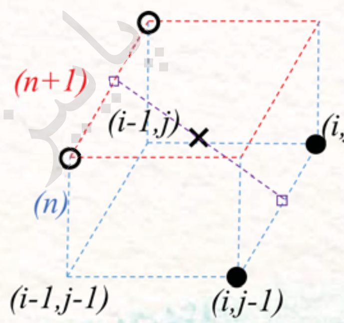
روش (3,3) فشرده

❖ روش مرکزی برای مشتق مکانی

$$f_x\Big|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{f_{i,j-1}^{n} - f_{i-1,j-1}^{n}}{\Delta x}\right)$$



$$f_y\Big|_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i-1,j}^{n+1} - f_{i-1,j-1}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{f_{i,j}^{n} - f_{i,j-1}^{n}}{\Delta y}\right)$$

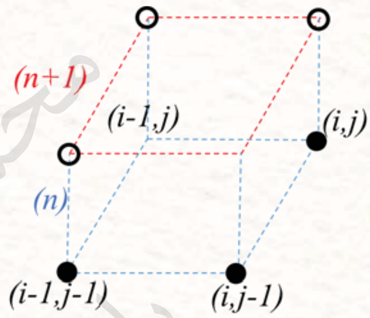


دانشگاه یزد
دانشکده مهندسی عمران
محمدرضا هادیان
پاییز ۱۳۹۹

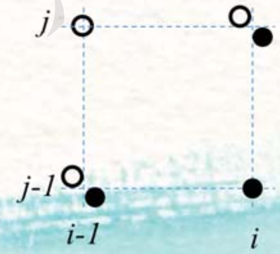
روش (3,3) فشرده

$$\frac{1}{2}\left(\frac{f^{n+1}_{i-1,j-1}-f^{n}_{i-1,j-1}}{\Delta t}+\frac{f^{n+1}_{i,j}-f^{n}_{i,j}}{\Delta t}\right)+\frac{u}{2}\left(\frac{f^{n+1}_{i,j}-f^{n+1}_{i-1,j}}{\Delta x}+\frac{f^{n}_{i,j-1}-f^{n}_{i-1,j-1}}{\Delta x}\right)$$

$$+\frac{v}{2}\left(\frac{f^{n+1}_{i-1,j}-f^{n+1}_{i-1,j-1}}{\Delta y}+\frac{f^{n}_{i,j}-f^{n}_{i,j-1}}{\Delta y}\right)=0$$



$$f^{n+1}_{i,j}=\frac{C_y-C_x}{1+C_x}\left(f^{n}_{i,j-1}-f^{n+1}_{i-1,j}\right)+\frac{C_y-1}{1+C_x}\left(f^{n+1}_{i-1,j-1}+f^{n}_{i,j}\right)+f^{n}_{i-1,j-1}$$



روش صریح است.

Any Question?