هیدرولیک محاسباتی

معادله یک‌بعدی جابجایی

محمدرضا هادیان

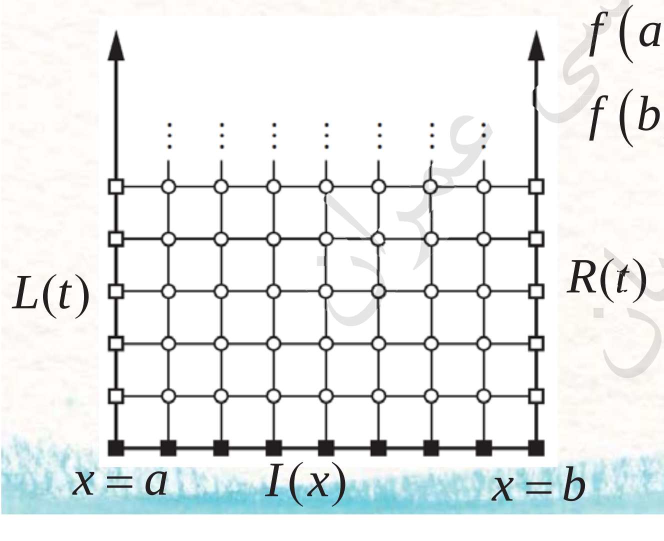
دانشگاه یزد- دانشکده مهندسی عمران

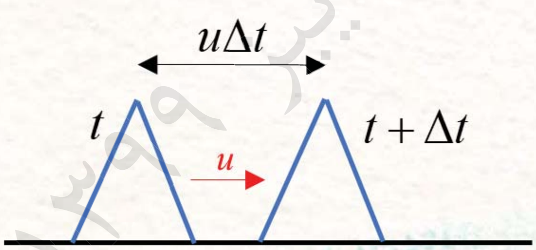
معادله یک بعدی جابجایی غیرماندگار

- معادله حاکم: $b \geq x \geq a$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial t} + u\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad f_t + uf_x = 0$

- شرط اولیه: $f(x,0) = I(x)$

- شرایط مرزی(دیریکله): $f(a,t) = L(t)$, $f(b,t) = R(t)$





Lax-Wendroff یک مرحله‌ای

❑ از بسط تیلور استفاده می کند.

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -u\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-u\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -u\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = -u\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

❑ بیان دیگر:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-u\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -u\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Lax-Wendroff یک مرحله‌ای

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \Delta t \boxed{\frac{\partial f}{\partial t}} + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}} + \cdots$$

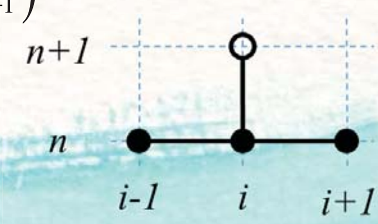
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -u\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \Delta t\, u\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta t)^2}{2!}u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cdots$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \Delta t\, u\frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{(\Delta t)^2}{2!}u^2\frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} + \cdots$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \frac{C}{2}\left(f_{i-1}^n - f_{i+1}^n\right) + \frac{C^2}{2}\left(f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n\right)$$

$$\boxed{f_i^{n+1} = \frac{C+C^2}{2}f_{i-1}^n + \left(1-C^2\right)f_i^n + \frac{C^2-C}{2}f_{i+1}^n}$$



Lax-Wendroff یک مرحله‌ای

$$f_i^{n+1} = \frac{C+C^2}{2} f_{i-1}^n + \left(1-C^2\right) f_i^n + \frac{C^2-C}{2} f_{i+1}^n$$

- شرط پایداری: $1 \geq C > 0$
- مرتبه دقت: $E = O\left\{(\Delta x)^2, (\Delta t)^2\right\}$
- روش قابلیت تعمیم خوبی ندارد.

https://en.wikipedia.org/wiki/Lax-Wendroff_method

Lax-Wendroff دو مرحله‌ای (Richmyer)

- از نظر زمانی سه‌مرحله‌ای است.
- گام زمانی را به دو نیم گام تقسیم می کند.
  - در نیم گام اول از روش Lax استفاده می کند.
  - در نیم گام دوم از روش Leap-Frog استفاده می کند.

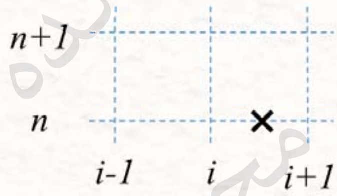
$$\left[n\Delta t, (n+1)\Delta t\right] = \left[n\Delta t, (n+\tfrac{1}{2})\Delta t\right] \cup \left[(n+\tfrac{1}{2})\Delta t, (n+1)\Delta t\right]$$

دو مرحله‌ای Lax-Wendroff (Richmyer)

❑ نیم گام اول:

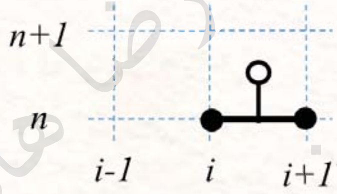
$$\left[n\Delta t,\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\Delta t\right]$$

$$f_t\Big|_{i+\frac{1}{2}}^{n}+u\,f_x\Big|_{i+\frac{1}{2}}^{n}=0$$

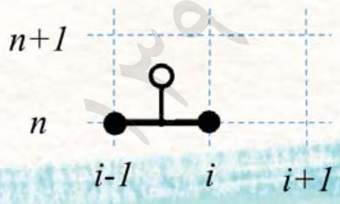


$$\frac{f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(f_i^n+f_{i+1}^n\right)}{\frac{\Delta t}{2}}+u\frac{f_{i+1}^n-f_i^n}{\Delta x}=0$$

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1+C}{2}f_i^n+\frac{1-C}{2}f_{i+1}^n$$



$$f_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1+C}{2}f_{i-1}^n+\frac{1-C}{2}f_i^n$$

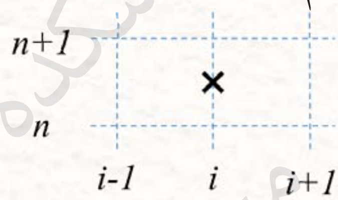


دو مرحله‌ای Lax-Wendroff (Richmyer)

❑ نیم گام دوم:

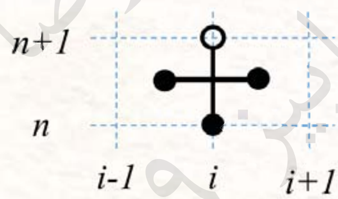
$$\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\Delta t,\left(n+1\right)\Delta t\right]$$

$$f_t\Big|_{i}^{n+\frac{1}{2}}+u\,f_x\Big|_{i}^{n+\frac{1}{2}}=0$$



$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}+u\frac{f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-f_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}=0$$

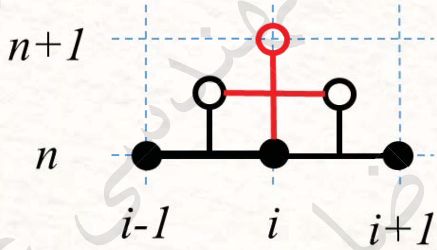
$$f_i^{n+1}=f_i^n-C\left(f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}+f_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$$



Lax-Wendroff دو مرحله‌ای (Richmyer)

$$\left[n\Delta t,\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\Delta t\right]:\qquad f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1+C}{2}f_i^n+\frac{1-C}{2}f_{i+1}^n$$

$$\left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\Delta t,\left(n+1\right)\Delta t\right]:\qquad f_i^{n+1}=f_i^n-C\left(f_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}+f_{i-\frac{1}{2}}^{n\frac{1}{2}}\right)$$



❑ شرط پایداری: $1\geq C>0$

❑ مرتبه دقت: $E=O\left\{(\Delta x)^2,(\Delta t)^2\right\}$

❑ در مقایسه با روش یک مرحله‌ای قابلیت تعمیم بهتری دارد.

MacCormack

❑ شامل دو مرحله پیش‌بینی و اصلاح است.

❑ مرحله پیش‌بینی (Predictor step):

- ❖ روش پیش‌رو مرتبه اول برای مشتق زمانی
- ❖ روش پیش‌رو مرتبه اول برای مشتق مکانی
- ❖ جواب‌های مرحله پیش‌بینی: جواب‌های واسطه اول

$$\frac{\overline{f}_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}+u\frac{f_{i+1}^n-f_i^n}{\Delta x}=0$$

$$\overline{f}_i^{n+1}=(1+C)\,f_i^n-Cf_{i+1}^n$$

MacCormack

- مرحله اصلاح (Corrector step):
  - روش پس‌رو مرتبه اول برای مشتق زمانی
  - روش پس‌رو مرتبه اول برای مشتق مکانی
  - جواب‌های مرحله اصلاح: جواب‌های واسطه دوم

$$\frac{\overline{\overline{f}}_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\frac{\overline{f}_i^{n+1} - \overline{f}_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

$$\overline{\overline{f}}_i^{n+1} = f_i^n - C\left(\overline{f}_i^{n+1} - \overline{f}_{i-1}^{n+1}\right)$$

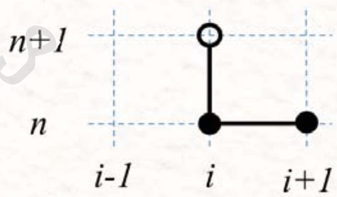
- جواب نهایی:

$$f_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{f}}_i^{n+1} + \overline{f}_i^{n+1}\right)$$

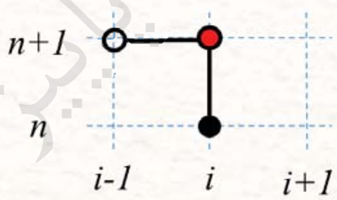
MacCormack

$$f_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{f}}_i^{n+1} + \overline{f}_i^{n+1}\right) \qquad \overline{\overline{f}}_i^{n+1} = 2f_i^{n+1} - \overline{f}_i^{n+1}$$

Predictor step: $\overline{f}_i^{n+1} = (1+C)f_i^n - Cf_{i+1}^n$



Corrector step: $f_i^{n+1} = \frac{1}{2}f_i^n + \frac{C}{2}\overline{f}_{i-1}^{n+1} + \frac{1-C}{2}\overline{f}_i^{n+1}$



MacCormack

- شرط پایداری: $1 \geq C > 0$
- مرتبه دقت: $E = O\left\{(\Delta x)^2, (\Delta t)^2\right\}$

https://en.wikipedia.org/wiki/MacCormack_method

Hopscotch

- روش دومرحله‌ای است.
- برای نقاط فرد روش FTCS استفاده می کند.

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \qquad \text{i=1,3,5,}\cdots$$

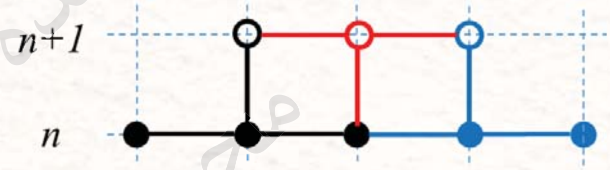
- برای نقاط زوج روش BTCS استفاده می کند.

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \qquad \text{i=2,4,6,}\cdots$$

دانشگاه یزد
دانشکده مهندسی عمران
محمدرضا هادیان
پاییز ۱۳۹۹

Hopscotch

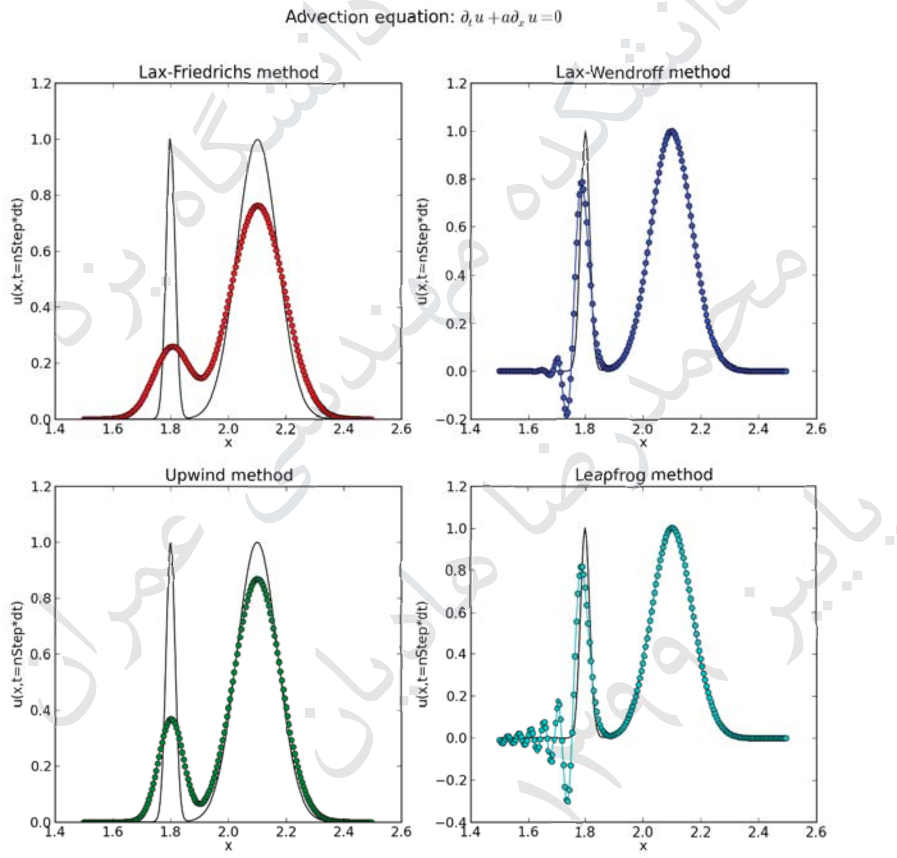
$$f_i^{n+1} = \frac{C}{2} f_{i-1}^{n} + f_i^{n} - \frac{C}{2} f_{i+1}^{n} \qquad i=1,3,5,\cdots$$



$$f_i^{n+1} = f_i^{n} + \frac{C}{2}\left(f_{i-1}^{n+1} - f_{i+1}^{n+1} \right) \qquad i=2,4,6,\cdots$$

- معمولاً برای دوبعدی و سه‌بعدی استفاده می‌شود.
- صریح است.
- مرتبه دقت: $E = O\left\{(\Delta x)^2, \Delta t\right\}$

Numerical Diffusion/Dispersion



Any Question?