هیدرولیک محاسباتی

معادله یک‌بعدی جابجایی

محمدرضا هادیان

دانشگاه یزد- دانشکده مهندسی عمران

شکل کلی معادله انتقال

- معادله کلی انتقال اسکالر (Scalar Transport Equation) :

شتاب موضعی (Local Acceleration)

جابجایی (Convection)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi)}+\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(\rho\varphi u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\varphi v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho\varphi w)}$$

$$=\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}+\boxed{S_\varphi}$$

پخش (Diffusion)

چشمه/چاه

(Source/Sink)

شکل ساده معادله انتقال

❑ معادله مورد استفاده در درس:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\underbrace{u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}+w\frac{\partial f}{\partial z}}_{\text{جابجایی (Convection)}}=\underbrace{\alpha_x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\alpha_y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\alpha_z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}_{\text{پخش (Diffusion)}}+S_f$$

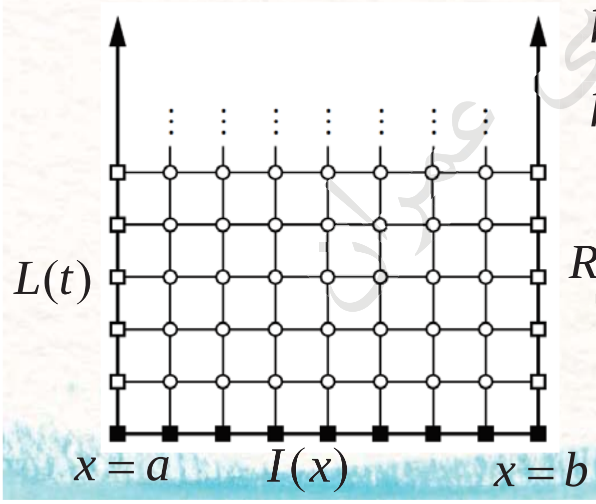
معادله یک بعدی جابجایی غیرماندگار

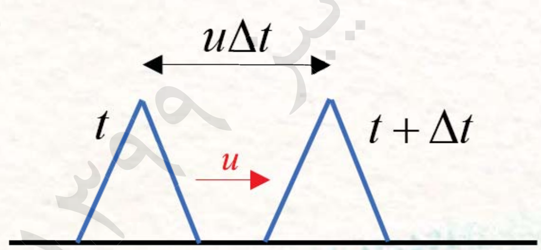
❑ معادله حاکم: $b\geq x\geq a$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=0 \qquad f_t+uf_x=0$

❑ شرط اولیه: $f\left(x,0\right)=I(x)$

❑ شرایط مرزی (دیریکله):

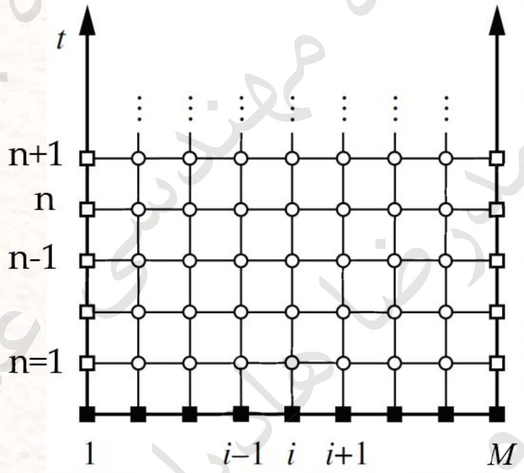
$$f\left(a,t\right)=L(t)$$
$$f\left(b,t\right)=R(t)$$





روش کلاسیک صریح

- روش FTCS
- گسسته‌سازی میدان حل



$$\Delta x = \frac{b-a}{M-1}$$

روش کلاسیک صریح

- انتخاب فرمول مناسب برای مشتق‌ها

$$f_t + u f_x = 0$$

$$f_t\Big|_i^n + u\, f_x\Big|_i^n = 0$$

- روش پیش‌رو مرتبه یک برای مشتق زمانی (Forward Time)

$$f_t\Big|_i^n \cong \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}$$

- روش مرکزی برای مشتق مکانی (Central Space)

$$f_x\Big|_i^n \cong \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

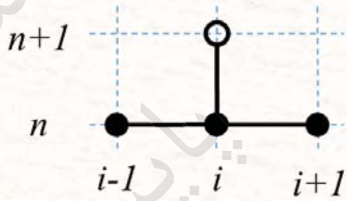
روش کلاسیک صریح

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}+u\frac{f_{i+1}^n-f_{i-1}^n}{2\Delta x}=0$$

$$f_i^{n+1}=f_i^n-u\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{i+1}^n-f_{i-1}^n\right)$$

$$C=u\frac{\Delta t}{\Delta x} \qquad C=\frac{u}{\Delta x/\Delta t}$$

$$f_i^{n+1}=f_i^n-\frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n-f_{i-1}^n\right)$$



$$\boxed{f_i^{n+1}=\frac{C}{2}f_{i-1}^n+f_i^n-\frac{C}{2}f_{i+1}^n}$$

❑ بررسی پایداری روش:

$$G=1-iC\sin(\beta h) \qquad |G|^2=1+C^2\sin^2(\beta h)$$

$$|G|\geq 1$$

❖ **روش ناپایدار است**

روش کلاسیک ضمنی

❑ انتخاب فرمول مناسب برای مشتق‌ها

$$f_t+uf_x=0$$

$$f_t\big|_i^{n+1}+u\,f_x\big|_i^{n+1}=0$$

❖ روش پس‌رو مرتبه یک برای مشتق زمانی (Backward Time)

$$f_t\big|_i^{n+1}\cong\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}$$

❖ روش مرکزی برای مشتق مکانی (Central Space)

$$f_x\big|_i^{n+1}\cong\frac{f_{i+1}^{n+1}-f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

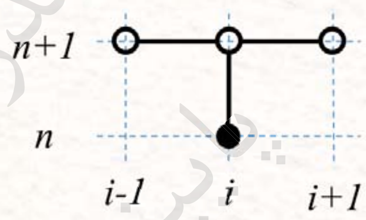
روش کلاسیک ضمنی

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^{n}}{\Delta t}+u\frac{f_{i+1}^{n+1}-f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}=0$$

$$f_i^{n+1}+u\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{i+1}^{n+1}-f_{i-1}^{n+1}\right)=f_i^{n}$$

$$C=u\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$f_i^{n+1}+\frac{C}{2}\left(f_{i+1}^{n+1}-f_{i-1}^{n+1}\right)=f_i^{n}$$



$$\boxed{-\frac{C}{2}f_{i-1}^{n+1}+f_i^{n+1}+\frac{C}{2}f_{i+1}^{n+1}=f_i^{n}}$$

روش کلاسیک ضمنی

❑ بررسی پایداری روش:

$$G+\frac{C}{2}\left(Ge^{i\beta h}-Ge^{-i\beta h}\right)=1$$

$$G+\left(1+\frac{C}{2}2i\sin\left(\beta h\right)\right)=1$$

$$G=\frac{1}{1+2Ci\sin\left(\beta h\right)}$$

$$\left|G\right|^2=\frac{1}{1+C^2\sin^2\left(\beta h\right)}$$

$$\left|G\right|\le 1$$

❖ **روش پایدار نامشروط است**

روش کلاسیک ضمنی

$$-\frac{C}{2}f_{i-1}^{n+1}+f_i^{n+1}+\frac{C}{2}f_{i+1}^{n+1}=f_i^n$$

❑ برای آنکه ماتریس ضرائب غالب قطری اکید باشد:

$$1\geq\left|\frac{C}{2}\right|+\left|\frac{C}{2}\right|=C$$

❖ شرط حل پذیری $\boxed{1\geq C>0}$

❑ شرط CFL (Courant–Friedrichs–Lewy condition)

روش کلاسیک ضمنی

❑ مرتبه دقت:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}-u\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+u\frac{(\Delta x)^2}{6}\left(1+2C^2\right)\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+O\left\{(\Delta x)^3\right\}=0$$

❖ مرتبه دقت روش ۱ است و قابل افزایش هم نیست.

روش upwind

❑ روش بادسوی (upwind) مرتبه اول

$$f_t + u f_x = 0$$

$$f_t\Big|_i^n + u\, f_x\Big|_i^n = 0$$

❖ روش پیش‌رو مرتبه یک برای مشتق زمانی (Forward Time)

$$f_t\Big|_i^n \cong \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}$$

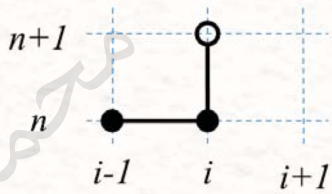
❖ روش پس‌رو مرتبه اول برای مشتق مکانی (Backward Space)

$$f_x\Big|_i^n \cong \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x}$$

روش upwind

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + u\frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$\boxed{f_i^{n+1} = C f_{i-1}^n + (1-C)\, f_i^n}$$



❑ شرط پایداری: $\boxed{1 \geq C > 0}$

❑ مرتبه دقت: $E = O(\Delta x)$

دانشگاه یزد
دانشکده مهندسی عمران
محمدرضا هادیان
پاییز ۱۳۹۹

روش Leapfrog

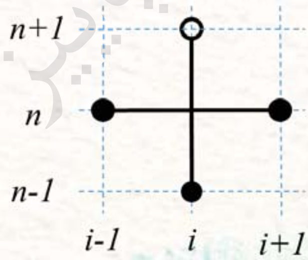
❑ روش مرکزی در زمان و مکان

$$f_t + u f_x = 0$$

$$f_t\big|_i^n + u\, f_x\big|_i^n = 0 \qquad f_t\big|_i^n \cong \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} \qquad f_x\big|_i^n \cong \frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x}$$

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} + u\,\frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} = 0$$

$$\boxed{f_i^{n+1} = f_i^{n-1} + C\left(f_{i-1}^{n} - f_{i+1}^{n}\right)}$$



روش Leapfrog

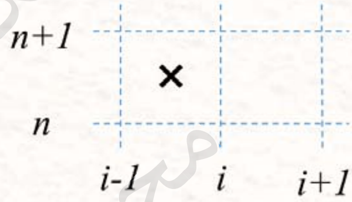
❑ شرط پایداری: $\boxed{1 \geq C > 0}$

❑ مرتبه دقت: $E = O\left\{(\Delta x)^2, (\Delta t)^2\right\}$

روش قوطی (Box)

- انتخاب فرمول مناسب برای مشتق‌ها

$$f_t + uf_x = 0$$



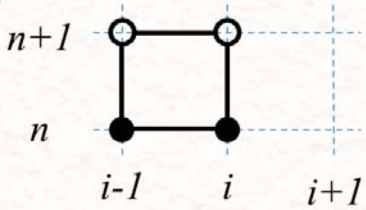
$$f_t\Big|_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + u\, f_x\Big|_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

$$f_t\Big|_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{2}\left(f_t\Big|_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + f_t\Big|_{i}^{n+\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i-1}^{n+1} - f_{i-1}^{n}}{\Delta t} + \frac{f_{i}^{n+1} - f_{i}^{n}}{\Delta t} \right)$$

$$f_x\Big|_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cong\cong \frac{1}{2}\left(f_x\Big|_{i-\frac{1}{2}}^{n} + f_x\Big|_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i}^{n} - f_{i-1}^{n}}{\Delta x} + \frac{f_{i}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \right)$$

روش قوطی (Box)

$$\boxed{(1-C)\, f_{i-1}^{n+1} + (1+C)\, f_{i}^{n+1} = (1+C)\, f_{i-1}^{n} + (1-C)\, f_{i}^{n}}$$



- روش پایدار نامشروط است.
- مرتبه دقت:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{C}{12}(\Delta x)^2\left(1-C^2\right)\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{240}\left(1-C^2\right)\left(2-2C^3\right)\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + O\left\{(\Delta x)^6\right\} = 0$$

$$E = O\left\{(\Delta x)^2, (\Delta t)^2\right\}$$

- در حالت خاص C=1 جواب دقیق بدون خطا بدست می آید!!!

روش Crank-Nicolson

- انتخاب فرمول مناسب برای مشتق‌ها

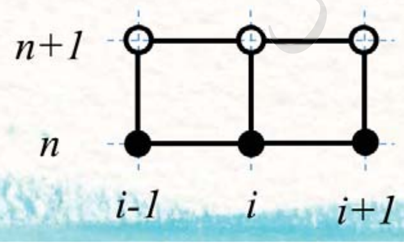
$$f_t + u f_x = 0$$

$$f_t\big|_i^{n+\frac{1}{2}} + u\, f_x\big|_i^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

$$f_t\big|_i^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n}}{\Delta t}$$

$$f_x\big|_i^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{2}\left(f_x\big|_i^{n} + f_x\big|_i^{n+1} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x} + \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right)$$

$$\boxed{-\frac{C}{4} f_{i-1}^{n+1} + f_i^{n+1} + \frac{C}{4} f_{i+1}^{n+1} = \frac{C}{4} f_{i-1}^{n} + f_i^{n} - \frac{C}{4} f_{i+1}^{n}}$$



- روش پایدار نامشروط است.
- مرتبه دقت: $E = O\left\{ (\Delta x)^2, (\Delta t)^2 \right\}$

روش Robert Weiss

- انتخاب فرمول مناسب برای مشتق‌ها

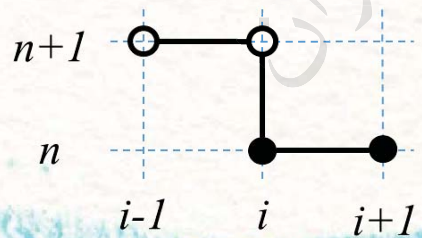
$$f_t + u f_x = 0$$

$$f_t\big|_i^{n+\frac{1}{2}} + u\, f_x\big|_i^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

$$f_t\big|_i^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n}}{\Delta t}$$

$$f_x\big|_i^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{2}\left(f_x\big|_i^{n} + f_x\big|_i^{n+1} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i+1}^{n} - f_{i}^{n}}{\Delta x} + \frac{f_{i}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \right)$$

$$\boxed{-C f_{i-1}^{n+1} + (2+C) f_i^{n+1} = (2+C) f_i^{n} - C f_{i+1}^{n}}$$



- روش پایدار نامشروط است.
- مرتبه دقت: $E = O\left\{ (\Delta x)^2, (\Delta t)^2 \right\}$

روش Lax

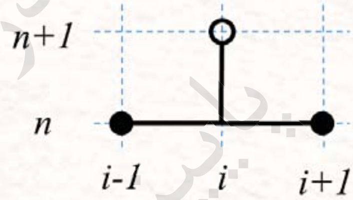
- سعی کرده مشکل پایداری روش FTCS را حل کند.

$$f_t\big|_i^n + u\, f_x\big|_i^n = 0$$

$$f_t\big|_i^n \cong \frac{f_i^{n+1} - \frac{1}{2}\left(f_{i-1}^n + f_{i+1}^n\right)}{\Delta t}$$

$$f_x\big|_i^n \cong \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\boxed{f_i^{n+1} = \frac{1+C}{2} f_{i-1}^n + \frac{1-C}{2} f_{i+1}^n}$$



- شرط پایداری: $1 \ge C > 0$
- روش ناسازگار است.

$$E = O\left\{\Delta t, (\Delta x)^2, \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right\}$$

Any Question?