هیدرولیک محاسباتی

معادله دوبعدی پخش
(CN ،BTCS)

محمدرضا هادیان

دانشگاه یزد- دانشکده مهندسی عمران

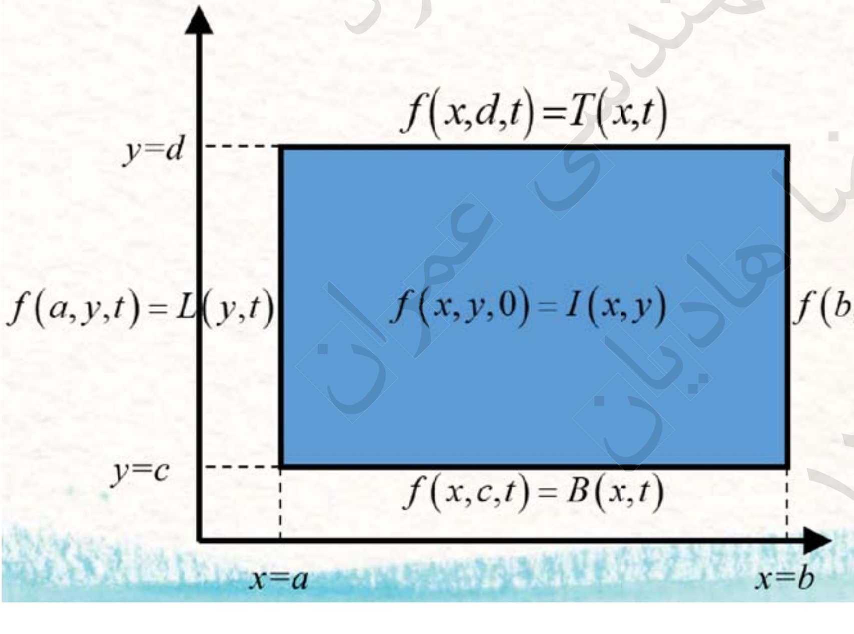
معادله دو بعدی پخش غیرماندگار

❑ معادله حاکم:

$$f_t = \alpha_x f_{xx} + \alpha_y f_{yy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$b \geq x \geq a$$
$$d \geq y \geq c$$



$$\Delta x = \frac{b-a}{M-1}$$
$$i = 1 \cdots M$$

$$\Delta y = \frac{d-c}{N-1}$$
$$j = 1 \cdots N$$

روش کلاسیک ضمنی

- انتخاب فرمول مناسب برای مشتق‌ها

$$f_t = \alpha_x f_{xx} + \alpha_y f_{yy}$$

$$f_t\Big|_{i,j}^{n+1} = \alpha_x\, f_{xx}\Big|_{i,j}^{n+1} + \alpha_y\, f_{yy}\Big|_{i,j}^{n+1}$$

- روش پیش‌رو مرتبه یک برای مشتق زمانی (Forward Time)

$$f_t\Big|_{i,j}^{n+1} \cong \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n}}{\Delta t}, \quad O(\Delta t)$$

- روش مرکزی برای مشتق مکانی (Central Space)

$$f_{xx}\Big|_{i,j}^{n+1} \cong \frac{f_{i-1,j}^{n+1} - 2 f_{i,j}^{n+1} + f_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2}, \quad O\left((\Delta x)^2\right)$$

$$f_{yy}\Big|_{i,j}^{n+1} \cong \frac{f_{i,j-1}^{n+1} - 2 f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}, \quad O\left((\Delta y)^2\right)$$

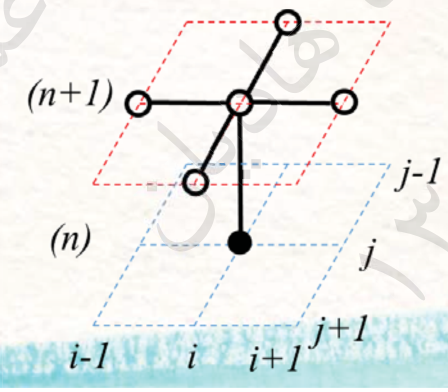
روش کلاسیک ضمنی

$$\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha_x \frac{f_{i-1,j}^{n+1} - 2 f_{i,j}^{n+1} + f_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \alpha_y \frac{f_{i,j-1}^{n+1} - 2 f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}$$

$$S_x = \alpha_x \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \qquad S_y = \alpha_y \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$$

$$f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n} = S_x\left(f_{i-1,j}^{n+1} - 2 f_{i,j}^{n+1} + f_{i+1,j}^{n+1}\right) + S_y\left(f_{i,j-1}^{n+1} - 2 f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j+1}^{n+1}\right)$$

$$\boxed{-S_x\left(f_{i-1,j}^{n+1} + f_{i+1,j}^{n+1}\right) - S_y\left(f_{i,j-1}^{n+1} + f_{i,j+1}^{n+1}\right) + \left(1 + 2S_x + 2S_y\right) f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^{n}}$$



روش کلاسیک ضمنی

❑ حالت خاص:

$$\begin{cases}\Delta x = \Delta y \\ \alpha_x = \alpha_y\end{cases} \Rightarrow \quad S_x = S_y = S$$

$$-S\left(f_{i-1,j}^{n+1} + f_{i+1,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1} + f_{i,j+1}^{n+1}\right) + (1+4S)\, f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^{n}$$

❑ روش BTCS(5,1) پایدار نامشروط است.

❑ MEPDE:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \alpha_x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \alpha_y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \alpha_x \frac{(\Delta x)^2}{12}(1+6S_x)\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$$

$$-\alpha_y \frac{(\Delta y)^2}{12}(1+6S_y)\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + O\left\{(\Delta x)^4, (\Delta y)^4\right\} = 0$$

❖ مرتبه دقت روش ۲ است و قابل افزایش هم نیست.

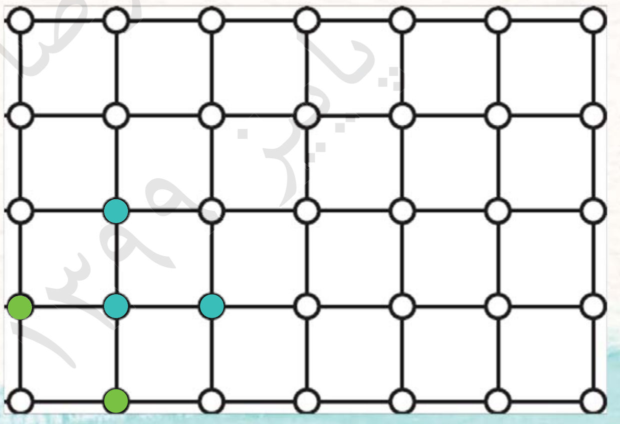
روش کلاسیک ضمنی – مثال

❑ حل معادله دوبعدی پخش برای حالت خاص:

$$\begin{cases}\Delta x = \Delta y \\ \alpha_x = \alpha_y\end{cases} \Rightarrow \quad S_x = S_y = S$$

$$-S\left(f_{i-1,j}^{n+1} + f_{i+1,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1} + f_{i,j+1}^{n+1}\right) + (1+4S)\, f_{i,j}^{n+1} = f_{i,j}^{n}$$

$$\begin{matrix} i=2 \\ j=2 \end{matrix} : -S\left(f_{1,2}^{n+1} + f_{3,2}^{n+1} + f_{2,1}^{n+1} + f_{2,3}^{n+1}\right) + (1+4S)\, f_{2,2}^{n+1} = f_{2,2}^{n}$$



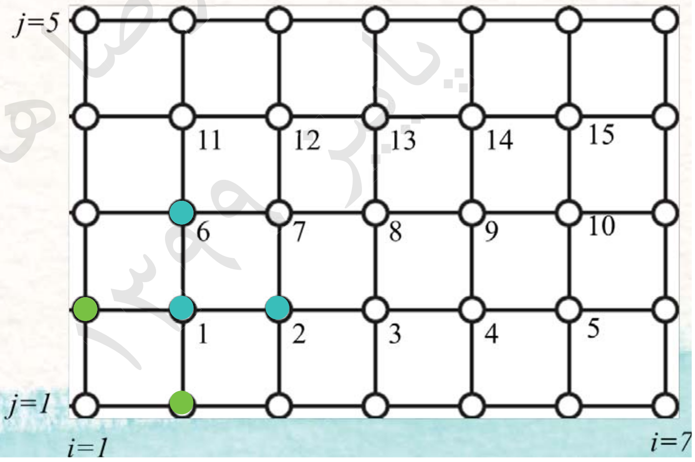
روش کلاسیک ضمنی – مثال

❑ حل معادله دوبعدی پخش برای حالت خاص:

$$\begin{cases}\Delta x=\Delta y\\ \alpha_x=\alpha_y\end{cases}\quad\Rightarrow\quad S_x=S_y=S$$

$$-S\left(f_{i-1,j}^{n+1}+f_{i+1,j}^{n+1}+f_{i,j-1}^{n+1}+f_{i,j+1}^{n+1}\right)+\left(1+4S\right)f_{i,j}^{n+1}=f_{i,j}^{n}$$

$$\begin{matrix}i=2\\ j=2\end{matrix}:-S\left(f_{1,2}^{n+1}+f_{3,2}^{n+1}+f_{2,1}^{n+1}+f_{2,3}^{n+1}\right)+\left(1+4S\right)f_{2,2}^{n+1}=f_{2,2}^{n}$$



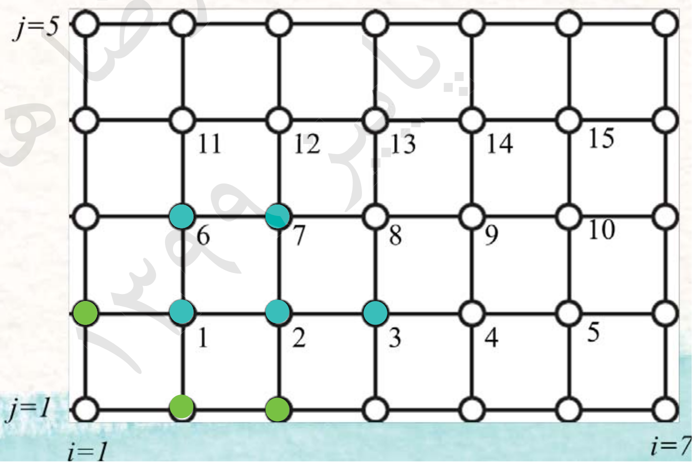
روش کلاسیک ضمنی – مثال

$$\begin{matrix}i=2\\ j=2\end{matrix}:-S\left(f_{1,2}^{n+1}+f_{3,2}^{n+1}+f_{2,1}^{n+1}+f_{2,3}^{n+1}\right)+\left(1+4S\right)f_{2,2}^{n+1}=f_{2,2}^{n}$$

$$-S\left(f_{1,2}^{n+1}+x_2+f_{2,1}^{n+1}+x_6\right)+\left(1+4S\right)x_1=f_{2,2}^{n}$$

$$\begin{matrix}i=3\\ j=2\end{matrix}:-S\left(f_{2,2}^{n+1}+f_{4,2}^{n+1}+f_{3,1}^{n+1}+f_{3,3}^{n+1}\right)+\left(1+4S\right)f_{3,2}^{n+1}=f_{3,2}^{n}$$

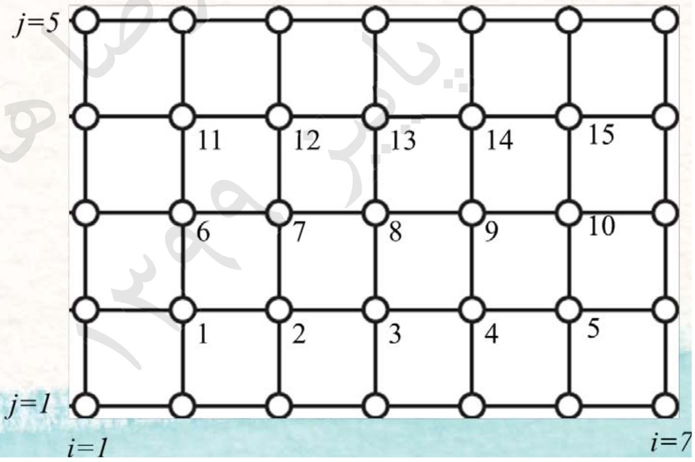
$$-S\left(x_1+x_3+f_{3,1}^{n+1}+x_7\right)+\left(1+4S\right)x_2=f_{3,2}^{n}$$



روش کلاسیک ضمنی – مثال

$$\begin{matrix} i=3 \\ j=3 \end{matrix} : -S\left(f_{2,3}^{n+1}+f_{4,3}^{n+1}+f_{3,2}^{n+1}+f_{3,4}^{n+1}\right)+\left(1+4S\right)f_{3,3}^{n+1}=f_{3,3}^{n}$$

$$-S\left(x_6+x_8+x_2+x_{12}\right)+\left(1+4S\right)x_7=f_{3,3}^{n}$$



روش کلاسیک ضمنی – مثال

$$AX=b$$

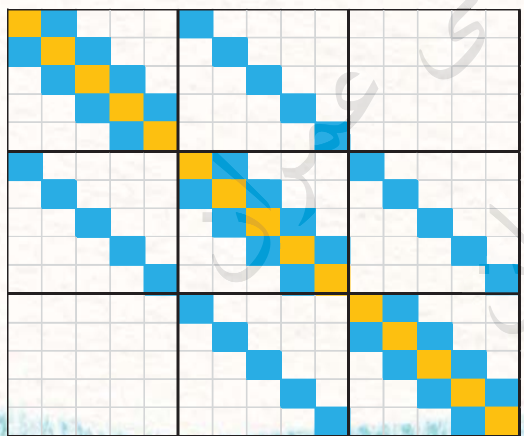
$$X=\left[x_1,x_2,\cdots,x_{15}\right]^T$$

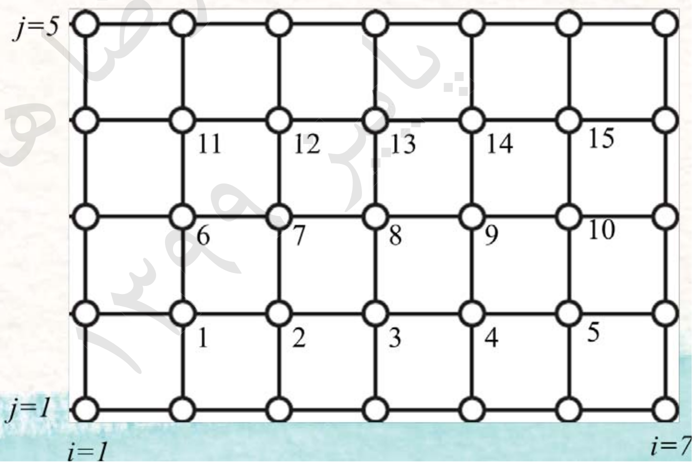
$$b=\left[b_1,b_2,\cdots,b_{15}\right]^T$$

$$A=\begin{bmatrix} B_{5\times5} & -SI_{5\times5} & 0_{5\times5} \\ -SI_{5\times5} & B_{5\times5} & -SI_{5\times5} \\ 0_{5\times5} & -SI_{5\times5} & B_{5\times5} \end{bmatrix}$$

$$A_{15\times15}=Trid\left(-SI_{5\times5},B_{5\times5},-SI_{5\times5}\right)$$

$$B_{5\times5}=Trid\left(-S,1+4S,-S\right)$$





روش کلاسیک ضمنی – مثال

- ماتریس ضرائب بصورت ۳ قطری بلوکی
- ماتریس ضرائب با ۵ قطر غیرصفر (۵ قطری نیست!)
- روش Stone یا SIP (https://en.wikipedia.org/wiki/Stone_method)

روش Crank-Nicolson

- انتخاب فرمول مناسب برای مشتق‌ها $\quad f_t = \alpha_x f_{xx} + \alpha_y f_{yy}$

$$f_t\Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_x\, f_{xx}\Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_y\, f_{yy}\Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

❖ روش مرکزی برای مشتق زمانی

$$f_t\Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n}}{\Delta t}$$

❖ روش مرکزی برای مشتق مکانی (Central Space)

$$f_{xx}\Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i-1,j}^{n} - 2 f_{i,j}^{n} + f_{i+1,j}^{n}}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i-1,j}^{n+1} - 2 f_{i,j}^{n+1} + f_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\right)$$

$$f_{yy}\Big|_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i,j-1}^{n} - 2 f_{i,j}^{n} + f_{i,j+1}^{n}}{(\Delta y)^2} + \frac{f_{i,j-1}^{n+1} - 2 f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}\right)$$

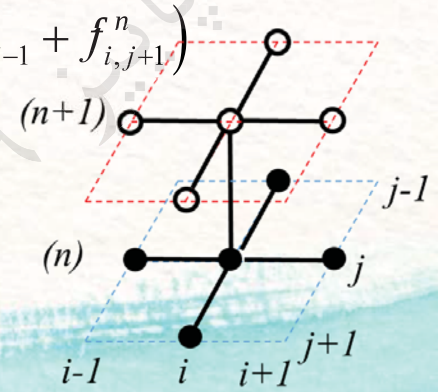
روش Crank-Nicolson

$$\frac{f_{i,j}^{n+1}-f_{i,j}^{n}}{\Delta t}=\frac{\alpha_x}{2}\left(\frac{f_{i-1,j}^{n}-2f_{i,j}^{n}+f_{i+1,j}^{n}}{(\Delta x)^2}+\frac{f_{i-1,j}^{n+1}-2f_{i,j}^{n+1}+f_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\right)$$

$$+\frac{\alpha_y}{2}\left(\frac{f_{i,j-1}^{n}-2f_{i,j}^{n}+f_{i,j+1}^{n}}{(\Delta y)^2}+\frac{f_{i,j-1}^{n+1}-2f_{i,j}^{n+1}+f_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}\right)$$

$$-\frac{S_x}{2}\left(f_{i-1,j}^{n+1}+f_{i+1,j}^{n+1}\right)+\left(1+S_x+S_y\right)f_{i,j}^{n+1}-\frac{S_y}{2}\left(f_{i,j-1}^{n+1}+f_{i,j+1}^{n+1}\right)=$$

$$\frac{S_x}{2}\left(f_{i-1,j}^{n}+f_{i+1,j}^{n}\right)+\left(1-S_x-S_y\right)f_{i,j}^{n}+\frac{S_y}{2}\left(f_{i,j-1}^{n}+f_{i,j+1}^{n}\right)$$

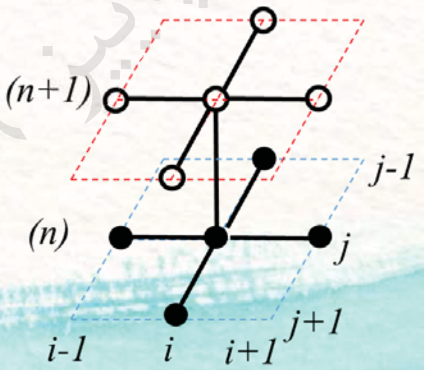


روش Crank-Nicolson

❑ حالت خاص: $S_x=S_y=S$

$$-\frac{S}{2}\left(f_{i-1,j}^{n+1}+f_{i+1,j}^{n+1}+f_{i,j-1}^{n+1}+f_{i,j+1}^{n+1}\right)+\left(1+2S\right)f_{i,j}^{n+1}=$$

$$\frac{S}{2}\left(f_{i-1,j}^{n}+f_{i+1,j}^{n}+f_{i,j-1}^{n}+f_{i,j+1}^{n}\right)+\left(1-2S\right)f_{i,j}^{n}$$



روش Crank-Nicolson

- روش پایدار نامشروط است.
- روش حل‌پذیر است (ماتریس ضرائب غالب قطری اکید است).
- MEPDE: $E = O\left\{(\Delta x)^2, (\Delta y)^2, (\Delta t)^2\right\}$

Any Question?

دانشگاه یزد
دانشکده مهندسی عمران
محمدرضا هادیان
پاییز ۱۳۹۹