هیدرولیک محاسباتی

معادله یک‌بعدی پخش
(روش‌های Saulyev و سه‌گامه)

محمدرضا هادیان

دانشگاه یزد- دانشکده مهندسی عمران

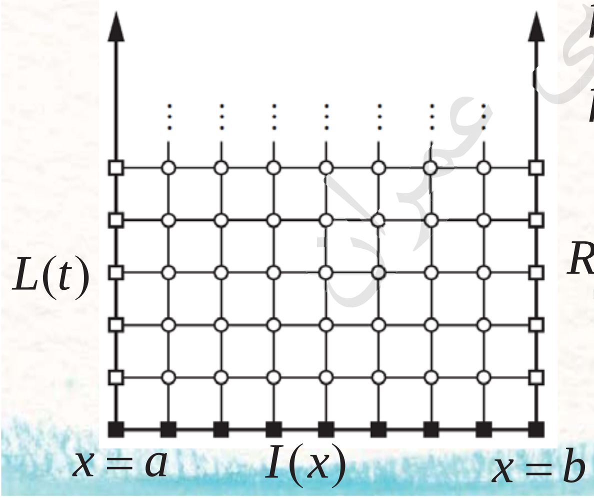
معادله یک بعدی پخش غیرماندگار

❑ معادله حاکم: $b \ge x \ge a$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad f_t = \alpha f_{xx}$

❑ شرط اولیه: $f(x,0) = I(x)$

❑ شرایط مرزی (دیریکله):

$$f(a,t) = L(t)$$
$$f(b,t) = R(t)$$



روش‌های Saulyev

- روش‌های Saulyev
  - روش Saulyev نوع اول (LR)
  - روش Saulyev نوع دوم (RL)
- شیوه‌ای که برای تقریب مشتق مکانی استفاده می کند با روابط قبلی بدست نمی‌آید و آن را توجیه می کنند!!!

روش Saulyev نوع اول (LR)

- انتخاب فرمول مناسب برای مشتق‌ها

$$f_t = \alpha f_{xx} \qquad\qquad f_t\big|_i^n = \alpha\, f_{xx}\big|_i^n$$

- روش پیش‌رو مرتبه یک برای مشتق زمانی:

$$f_t\big|_i^n \cong \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}$$

- روش مرکزی برای مشتق مکانی:

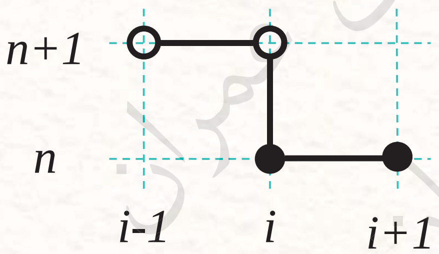
$$f_{xx}\big|_i^n \cong \frac{f_{i-1}^{n+1} - f_i^{n+1} - f_i^n + f_{i+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

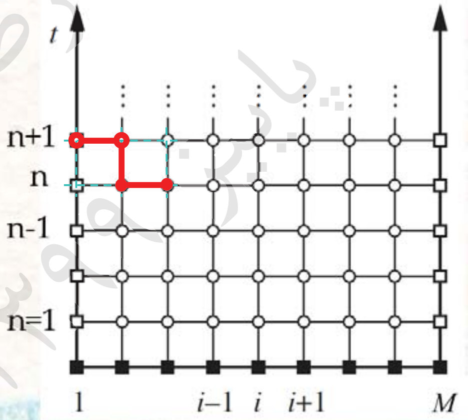
روش Saulyev نوع اول (LR)

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}=\alpha\frac{f_{i-1}^{n+1}-f_i^{n+1}-f_i^n+f_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \qquad S=\alpha\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$f_i^{n+1}-f_i^n=S\left(f_{i-1}^{n+1}-f_i^{n+1}-f_i^n+f_{i+1}^n\right)$$

$$(1+S)\,f_i^{n+1}-Sf_{i-1}^{n+1}=(1-S)\,f_i^n+Sf_{i+1}^n$$



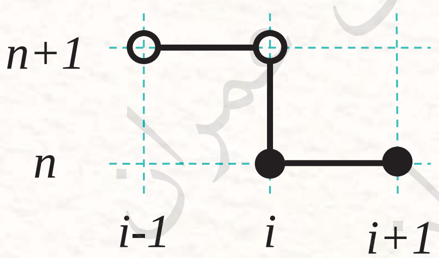


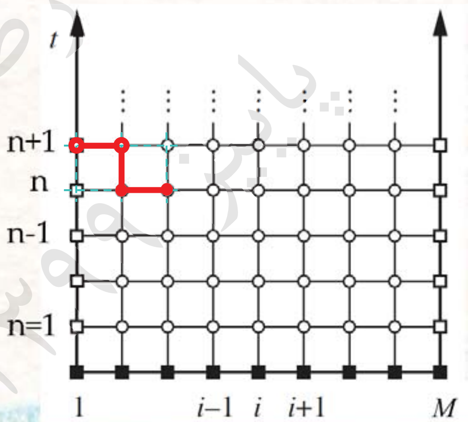
روش Saulyev نوع اول (LR)

$$(1+S)\,f_i^{n+1}=Sf_{i-1}^{n+1}+(1-S)\,f_i^n+Sf_{i+1}^n$$

$$f_i^{n+1}=\frac{1}{1+S}\left[Sf_{i-1}^{n+1}+(1-S)\,f_i^n+Sf_{i+1}^n\right]$$

$$\boxed{f_i^{n+1}=\frac{S}{1+S}f_{i-1}^{n+1}+\frac{1-S}{1+S}f_i^n+\frac{S}{1+S}f_{i+1}^n}$$





روش Saulyev نوع اول (LR)

- پایدار نامشروط است.
- سازگار است.
- مرتبه دقت:

$$\text{MEPDE} \quad \Rightarrow \quad E=\left(\Delta x,\Delta t\right)$$

روش Saulyev نوع دوم (RL)

- انتخاب فرمول مناسب برای مشتق‌ها

$$f_t=\alpha f_{xx} \qquad\qquad f_t\Big|_i^n=\alpha\, f_{xx}\Big|_i^n$$

- روش پیش‌رو مرتبه یک برای مشتق زمانی:

$$f_t\Big|_i^n \cong \frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}$$

- روش مرکزی برای مشتق مکانی:

$$f_{xx}\Big|_i^n \cong \frac{f_{i-1}^n-f_i^n-f_i^{n+1}+f_{i+1}^{n+1}}{\left(\Delta x\right)^2}$$

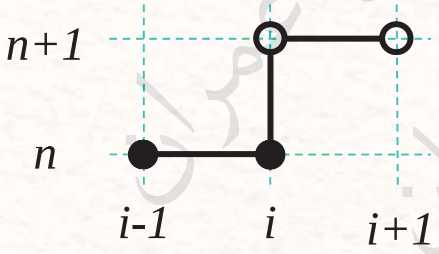
دانشگاه یزد
دانشکده مهندسی عمران
محمدرضا هادیان
پاییز ۱۳۹۹

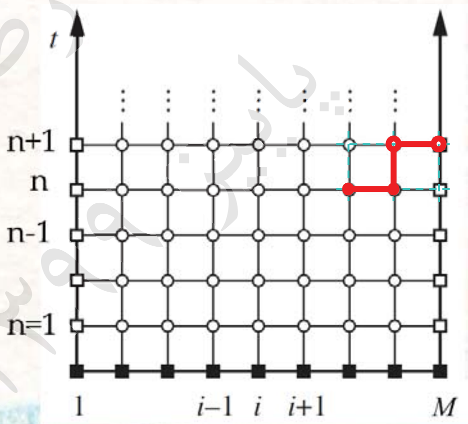
روش Saulyev نوع دوم (RL)

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^{n}}{\Delta t}=\alpha\frac{f_{i-1}^{n}-f_i^{n}-f_i^{n+1}+f_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\qquad S=\alpha\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$f_i^{n+1}-f_i^{n}=S\left(f_{i-1}^{n}-f_i^{n}-f_i^{n+1}+f_{i+1}^{n+1}\right)$$

$$(1+S)\,f_i^{n+1}-Sf_{i+1}^{n+1}=Sf_{i-1}^{n}+(1-S)\,f_i^{n}$$



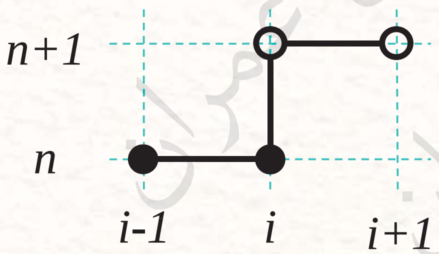


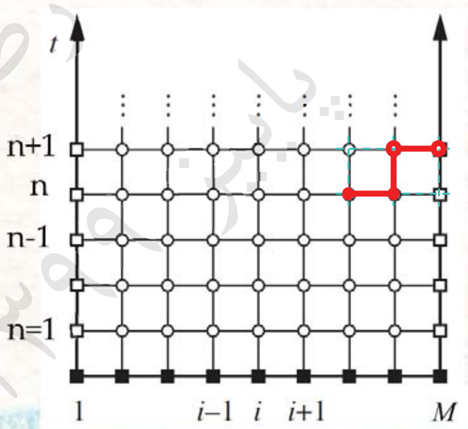
روش Saulyev نوع دوم (RL)

$$(1+S)\,f_i^{n+1}=Sf_{i-1}^{n}+(1-S)\,f_i^{n}+Sf_{i+1}^{n+1}$$

$$f_i^{n+1}=\frac{1}{1+S}\left[Sf_{i-1}^{n}+(1-S)\,f_i^{n}+Sf_{i+1}^{n+1}\right]$$

$$\boxed{f_i^{n+1}=\frac{S}{1+S}f_{i-1}^{n}+\frac{1-S}{1+S}f_i^{n}+\frac{S}{1+S}f_{i+1}^{n+1}}$$





روش Saulyev نوع دوم (RL)

- پایدار نامشروط است.
- سازگار است.
- مرتبه دقت:

$$\text{MEPDE} \quad \Rightarrow \quad E = (\Delta x, \Delta t)$$

روشهای Saulyev

- Barakat and Clark (1966):

$$Saulyev(LR) \Rightarrow u_i^{n+1}$$

$$Saulyev(RL) \Rightarrow v_i^{n+1}$$

$$f_i^{n+1} = \frac{u_i^{n+1} + v_i^{n+1}}{2}$$

⟵ افزایش مرتبه دقت

روش‌های سه‌گامه

- ❑ در حل معادلات مشتقات جزئی بیشتر از سه گام استفاده نمی‌شود.
- ❑ در روش ضمنی وزنی (۲ گامه) پارامتر θ را روی زمان قرار دادیم. دراینجا ψ را هم روی زمان می گذاریم.

$$f_t\Big|_i^n \cong \psi\, FT\Big|_i^n + (1-\psi)\, CT\Big|_i^n$$

$$f_t\Big|_i^n \cong \psi \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + (1-\psi)\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t}$$

$$f_{xx}\Big|_i^n \cong \theta\, CS\Big|_i^{n-1} + (1-\theta)\, CS\Big|_i^n$$

$$f_{xx}\Big|_i^n \cong \theta \frac{f_{i-1}^{n-1} - 2f_i^{n-1} + f_{i+1}^{n-1}}{(\Delta x)^2} + (1-\theta)\frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

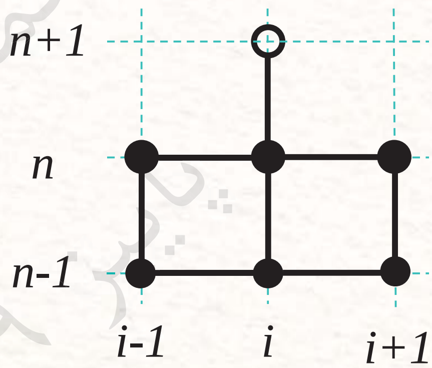
سه‌گامه وزنی

$$f_t\Big|_i^n = \alpha\, f_{xx}\Big|_i^n$$

$$\psi \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + (1-\psi)\frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} =$$

$$\alpha\left(\theta \frac{f_{i-1}^{n-1} - 2f_i^{n-1} + f_{i+1}^{n-1}}{(\Delta x)^2} + (1-\theta)\frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{(\Delta x)^2}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_i^{n+1} =\; & \frac{2S(1-\theta)}{2-\psi}\left(f_{i-1}^n + f_{i+1}^n\right) + 2\frac{1-\psi-2S(1-\theta)}{2-\psi} f_i^n \\ & + \frac{2S\theta}{2-\psi}\left(f_{i-1}^{n-1} + f_{i+1}^{n-1}\right) + \frac{\psi - 4S\theta}{2-\psi} f_i^{n-1} \end{aligned}}$$

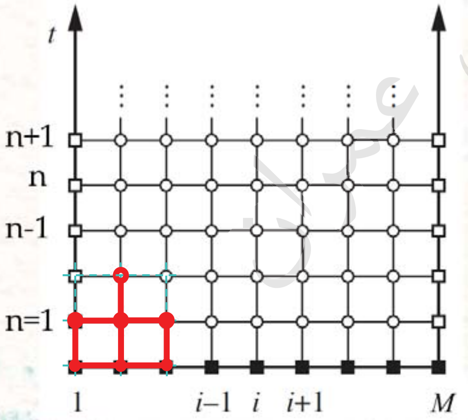


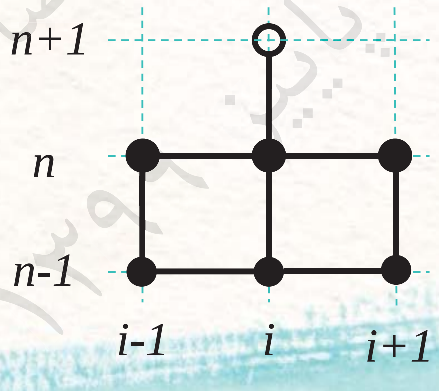
$$\psi \neq 2$$

- ❑ روش صریح (1,3,3) است.

سه‌گامه وزنی

- محاسبات از $n=1$ شروع می‌شود و مقادیر در $n=2$ بدست می‌آید.
- برای مقادیر در $n=1$ باید از یک روش دو گامه استفاده کرد.
- روش مورد استفاده در اولین گام باید مرتبه دقت آن کمتر از روش مورد استفاده نباشد ولی چون فقط در یک گام استفاده می‌شود، حوزه پایداری آن مهم نیست.





سه‌گامه وزنی

- مرتبه دقت:

$$\frac{\partial f}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\alpha\frac{(\Delta x)^2}{4!}\left[-1+6S+12S\theta-6S\psi\right]\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+O\left\{(\Delta x)^4\right\}=0$$

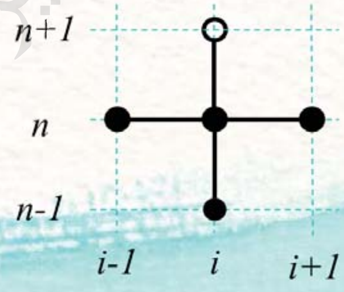
- برای رسیدن به مرتبه دقت ۴:

$$-1+6S+12S\theta-6S\psi=0$$

- ❖ یک راه حل:

$$\theta=0 \quad\Rightarrow\quad \psi=\frac{6S-1}{6S} \quad \Rightarrow \quad E=O\left\{(\Delta x)^4\right\}$$

$$\boxed{f_i^{n+1}=\frac{12S^2}{1+6S}\left(f_{i-1}^n+f_{i+1}^n\right)+2\frac{1-12S^2}{1+6S}f_i^n-\frac{1-6S}{1+6S}f_i^{n-1}}$$



سه‌گامه وزنی

❑ حوزه پایداری:

$$\frac{1}{\sqrt{12}} \geq S > 0$$

❑ MEPDE:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^4}{360}\left(1 - 60S^2\right)\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + O\left\{(\Delta x)^6\right\} = 0$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{60}} \quad \Rightarrow \quad E = O\left\{(\Delta x)^6\right\}$$

❖ باید برای گام اول یک روش دو گامه با دقت مرتبه ۶ استفاده کرد!!!

Any Question?

دانشگاه یزد دانشکده مهندسی عمران محمدرضا هادیان پاییز ۱۳۹۹