هیدرولیک محاسباتی

معادله یک‌بعدی پخش
(روش BTCS)

محمدرضا هادیان

دانشگاه یزد- دانشکده مهندسی عمران

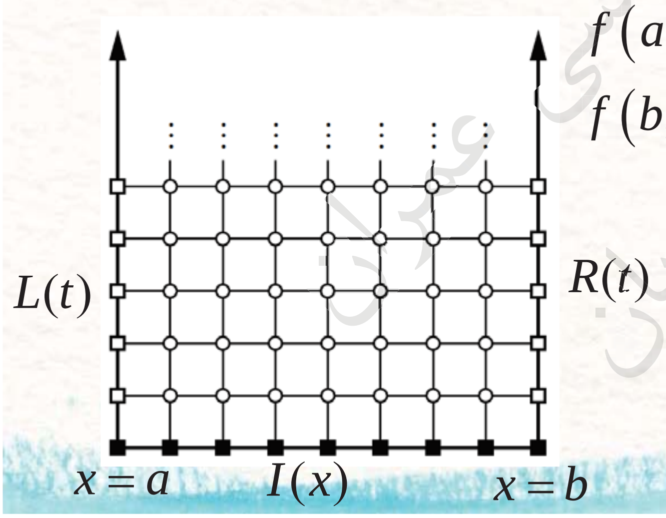
معادله یک بعدی پخش غیرماندگار

- معادله حاکم: $b \ge x \ge a$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\qquad f_t = \alpha f_{xx}$

- شرط اولیه: $f(x,0) = I(x)$

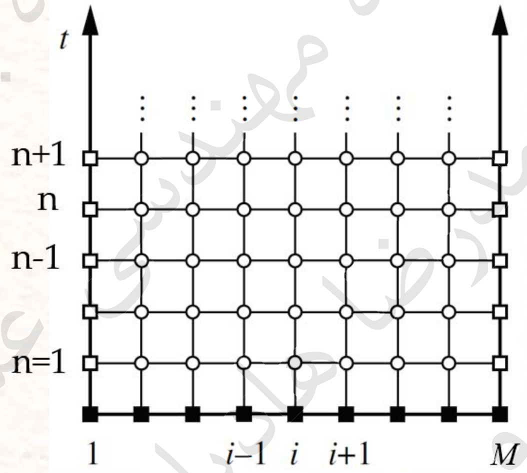
- شرایط مرزی (دیریکله):

$$f(a,t) = L(t)$$
$$f(b,t) = R(t)$$



روش کلاسیک ضمنی

- روش اولر پس‌رو، کلاسیک ضمنی، BTCS، BTCS(3,1)
- گسسته‌سازی میدان حل



$$\Delta x = \frac{b-a}{M-1}$$

روش کلاسیک ضمنی

- انتخاب فرمول مناسب برای مشتق‌ها

$$f_t = \alpha f_{xx}$$

$$f_t\Big|_i^{n+1} = \alpha\, f_{xx}\Big|_i^{n+1}$$

- روش پس‌رو مرتبه یک برای مشتق زمانی (Backward Time)

$$f_t\Big|_i^{n+1} \cong \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t},\quad O(\Delta t)$$

- روش مرکزی برای مشتق مکانی (Central Space)

$$f_{xx}\Big|_i^{n+1} \cong \frac{f_{i-1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2},\quad O\left((\Delta x)^2\right)$$

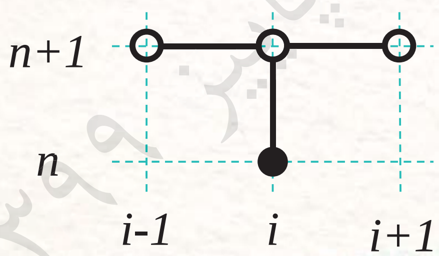
روش کلاسیک ضمنی

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}=\alpha\frac{f_{i-1}^{n+1}-2f_i^{n+1}+f_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$f_i^{n+1}=f_i^n+\alpha\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(f_{i-1}^{n+1}-2f_i^{n+1}+f_{i+1}^{n+1}\right) \qquad S=\alpha\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$f_i^{n+1}=f_i^n+S\left(f_{i-1}^{n+1}-2f_i^{n+1}+f_{i+1}^{n+1}\right)$$

$$\boxed{-Sf_{i-1}^{n+1}+(1+2S)f_i^{n+1}-Sf_{i+1}^{n+1}=f_i^n}$$



روش کلاسیک ضمنی

$$\boxed{-Sf_{i-1}^{n+1}+(1+2S)f_i^{n+1}-Sf_{i+1}^{n+1}=f_i^n}$$

$$n=0 \qquad -Sf_{i-1}^{1}+(1+2S)f_i^{1}-Sf_{i+1}^{1}=f_i^0$$

$$-Sf_{i-1}^{1}+(1+2S)f_i^{1}-Sf_{i+1}^{1}=I_i$$

$$L^1$$

$$i=2: \quad -Sf_1^1+(1+2S)f_2^1-Sf_3^1=I_2$$

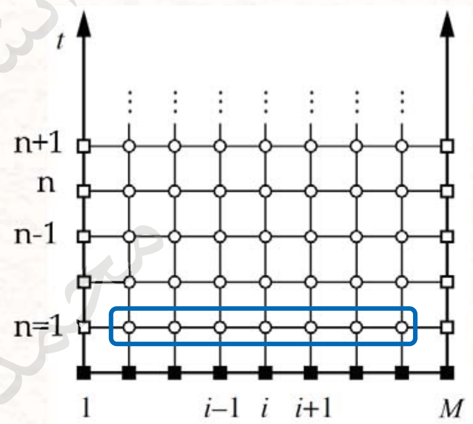
$$i=3: \quad -Sf_2^1+(1+2S)f_3^1-Sf_4^1=I_3$$

$$i=4: \quad -Sf_3^1+(1+2S)f_4^1-Sf_5^1=I_4$$

$$\vdots$$

$$R^1$$

$$i=M-1: \quad -Sf_{M-2}^1+(1+2S)f_{M-1}^1-Sf_M^1=I_{M-1}$$



- چون برای حل معادلات به دستگاه نیاز داریم به روش کلاسیک ضمنی می گویند.

روش کلاسیک ضمنی

$$Ax=b$$

$$\begin{bmatrix} 1+2S & -S & & & & & \\ -S & 1+2S & -S & & & 0 & \\ & -S & 1+2S & -S & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -S & 1+2S & -S & \\ & 0 & & & -S & 1+2S & -S \\ & & & & & -S & 1+2S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \\ \vdots \\ f_{M-3}^1 \\ f_{M-2}^1 \\ f_{M-1}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SL^1+I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ \vdots \\ I_{M-3} \\ I_{M-2} \\ I_{M-1}+SR^1 \end{bmatrix}$$

$$A=Tridiagonal\left(-S,1+2S,-S\right)$$

$$x=\left[f_2^1,f_3^1,f_4^1,\cdots,f_{M-3}^1,f_{M-2}^1,f_{M-1}^1\right]^T$$

$$b=\left[SL^1+I_2,I_3,I_4,\cdots,I_{M-3},I_{M-2},I_{M-1}+SR^1\right]^T$$

روش کلاسیک ضمنی

$$\boxed{-Sf_{i-1}^{n+1}+\left(1+2S\right)f_i^{n+1}-Sf_{i+1}^{n+1}=f_i^n}$$

L^{n+1}

$$i=2:\ -Sf_1^{n+1}+\left(1+2S\right)f_2^{n+1}-Sf_3^{n+1}=f_2^n$$

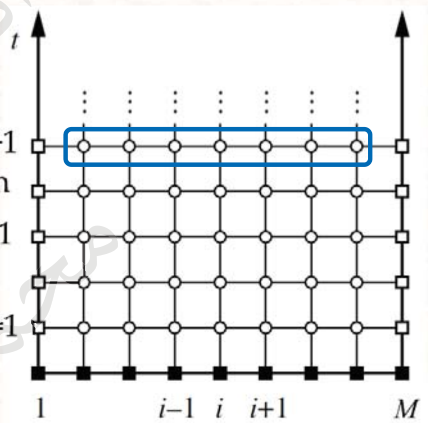
$$i=3:\ -Sf_2^{n+1}+\left(1+2S\right)f_3^{n+1}-Sf_4^{n+1}=f_3^n$$

$$i=4:\ -Sf_2^{n+1}+\left(1+2S\right)f_3^{n+1}-Sf_4^{n+1}=f_3^n$$

$$\vdots$$

R^{n+1}

$$i=M-1:\ -Sf_{M-2}^{n+1}+\left(1+2S\right)f_{M-1}^{n+1}-Sf_M^{n+1}=f_{M-1}^n$$



$$\boxed{A=Tridiagonal\left(-S,1+2S,-S\right)}$$ در همه گام‌ها یکسان است

$$Ax=b \qquad x=\left[f_2^{n+1},f_3^{n+1},f_4^{n+1},\cdots,f_{M-3}^{n+1},f_{M-2}^{n+1},f_{M-1}^{n+1}\right]^T$$

$$b=\left[SL^{n+1}+f_2^n,f_3^n,f_4^n,\cdots,f_{M-3}^n,f_{M-2}^n,f_{M-1}^n+SR^{n+1}\right]^T$$

حل دستگاه معادلات خطی

- انتخاب روش
- کاهش خطا
- کاهش زمان

حذفی	تکراری	تجزیه‌ای	گرادیان مزدوج
• گاوس پیش‌رو • گاوس پس‌رو • گاوس - جردن	• ژاکوبی • گاوس سیدل • SOR	• چولسکی • کروت • دولیتل	

حل دستگاه معادلات خطی

❑ اگر دستگاه غالب قطری اکید (Strictly Diagonally Dominant) باشد، می‌توان نشان داد خطاها رشد نمی کنند و هیچگونه محورگیری نیاز نیست. در روش‌های تکراری اکیداً همگرا است.

$$for\ all\ i,\ |a_{ii}| \geq \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad\qquad |1+2S| > |-S| + |-S|$$

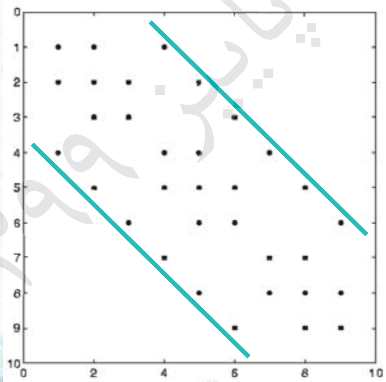
❑ در اینجا ماتریس ضرائب نواری (Bounded) تنک (Sparse) است.

Dense Matrix

1	2	31	2	9	7	34	22	11	5
11	92	4	3	2	2	3	3	2	1
3	9	13	8	21	17	4	2	1	4
8	32	1	2	34	18	7	78	10	7
9	22	3	9	8	71	12	22	17	3
13	21	21	9	2	47	1	81	21	9
21	12	53	12	91	24	81	8	91	2
61	8	33	82	19	87	16	3	1	55
54	4	78	24	18	11	4	2	99	5
13	22	32	42	9	15	9	22	1	21

Sparse Matrix

1	.	3	.	9	.	3	.	.	.
11	.	4	.	.	.	.	.	2	1
.	.	1	.	.	.	4	.	1	.
8	.	.	.	3	1	.	.	.	.
.	.	.	9	.	.	1	.	17	.
13	21	.	9	2	47	1	81	21	9
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	19	8	16	.	.	55
54	4	.	.	.	11	.	.	.	.
.	.	2	.	.	.	.	22	.	21



حل دستگاه معادلات خطی

- برای ماتریس ضرائب سه‌قطری می‌توان از الگوریتم توماس استفاده کرد که همان روش حذفی گاوس برای ماتریس نوای است.
- می‌توان ثابت کرد حجم عملیات روش حذفی گاوس O(n3) است ولی در الگوریتم توماس حجم عملیات O(n) است.
- روش BTCS را حل‌پذیر گویند چون دستگاه آن غالب قطری اکید است.

چند لینک مفید

- https://en.wikipedia.org/wiki/Tridiagonal_matrix_algorithm
- https://en.wikibooks.org/wiki/Algorithm_Implementation/Linear_Algebra/Tridiagonal_matrix_algorithm
- https://en.wikipedia.org/wiki/Basic_Linear_Algebra_Subprograms
- https://en.wikipedia.org/wiki/LAPACK

دانشگاه یزد
دانشکده مهندسی عمران
محمدرضا هادیان
پاییز ۱۳۹۹

بررسی پایداری روش کلاسیک ضمنی

$$-Sf_{i-1}^{n+1}+(1+2S)\,f_i^{n+1}-Sf_{i+1}^{n+1}=f_i^n$$

$$-Se_{i-1}^{n+1}+(1+2S)e_i^{n+1}-Se_{i+1}^{n+1}=e_i^n$$

$i\rightarrow r$

$$-Se_{r-1}^{n+1}+(1+2S)e_r^{n+1}-Se_{r+1}^{n+1}=e_r^n$$

$e_r^n=G^n e^{i\beta rh}$

$$-SG^{n+1}e^{i\beta(r-1)h}+(1+2S)G^{n+1}e^{i\beta rh}-SG^{n+1}e^{i\beta(r+1)h}=G^n e^{i\beta rh}$$

$\div G^n e^{i\beta rh}$

$$G\left[-Se^{-i\beta h}+(1+2S)-Se^{i\beta h}\right]=1$$

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos(\theta) \\ e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$G\left[-2S\cos(\beta h)+1+2S\right]=1$$

بررسی پایداری روش کلاسیک ضمنی

$$G\left[-2S\cos(\beta h)+1+2S\right]=1$$

$$G\left[1+2S\left(1-\cos(\beta h)\right)\right]=1$$

$$G\left[1+4S\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right]=1$$

$$G=\frac{1}{1+4S\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)}\quad\Rightarrow\quad |G|\le 1$$

روش پایدار نامشروط (Unconditionally Stable) است.

مرتبه دقت روش کلاسیک ضمنی

$$MEPDE: \frac{\partial f}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \alpha\left(1+6S\right)\frac{\left(\Delta x\right)^2}{12}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + O\left(\left(\Delta x\right)^4\right) = 0$$

- مرتبه دقت نسبت به متغیر فضایی ۲ است.
- در این روش نمی‌توان مرتبه دقت را افزایش داد و مرتبه دقت همواره ۲ است.
- روش BTCS زمان زیادتری برای حل لازم دارد.

مزایا و معایب روش FTCS و BTCS

- روش FTCS
  - پایدار مشروط است.
  - در یک زمان کوتاه جواب می‌دهد.
  - به ازای S=1/6 مرتبه دقت آن به ۴ افزایش می‌یابد.
- روش BTCS
  - پایدار نامشروط است.
  - به زمان زیادی نیاز دارد ولی زمان‌بر(Time Consuming) نیست.

دانشگاه یزد دانشکده مهندسی عمران محمدرضا هادیان پاییز ۱۳۹۹

Any Question?