هیدرولیک محاسباتی

سازگاری، پایداری، همگرایی

محمدرضا هادیان
دانشگاه یزد- دانشکده مهندسی عمران

حل قابل اعتماد؟

- خصوصیات یک روش برای آنکه قابل اعتماد باشد:

  - Consistency (سازگاری)
  - Stability (پایداری)
  - Convergence (همگرایی)

سازگاری ، پایداری، همگرایی

❑ **سازگاری:**

با کوچک کردن گام (زمانی ومکانی) معادله تفاضل محدود به معادله دیفرانسیل اولیه میل کند.

❑ **پایداری:**

خطاها در حل عددی رشد نکنند.

❑ **همگرایی:**

باکوچک کردن گام (زمانی و مکانی)جواب‌های روش عددی به جواب‌های واقعی نزدیک شود.

خطاها

❑ خطاها در محاسبات عددی

❖ محاسباتی ← به پایداری مربوط است.

❖ گسسته‌سازی ← به همگرایی مربوط است.

تشخیص پایداری

- راه‌های تشخیص پایداری یک روش عددی:
  - روش ون‌نیومان
  - روش ماتریسی
  - روش انحراف مستقیم (سخت است)
  - روش‌های متفرقه (معادله خاصی را با شرایط خاص بررسی می کند یا تعریف جدیدی ارائه داده‌اند)

روش ون نیومان

- تشکیل معادله خطا

$$f_i^{n+1} = S\left(f_{i-1}^n + f_{i+1}^n\right) + (1-2S)\,f_i^n$$

$$f_i^n = \tilde{f}_i^n + e_i^n$$

$$e_i^{n+1} = S\left(e_{i-1}^n + e_{i+1}^n\right) + (1-2S)\,e_i^n$$

- تغییر متغیر i به r

$$e_r^{n+1} = S\left(e_{r-1}^n + e_{r+1}^n\right) + (1-2S)\,e_r^n$$

- قراردادن $e_r^n = G^n e^{i\beta rh}$

  - G: Amplification Factor (ضریب بزرگنمایی)
  - β: Wave Number (عدد موج)

روش ون نیومان

❑ روش در صورتی پایدار است که $|G|\le 1$

این روش از تکنیک جدای پذیری و تقریب سری بی‌نهایت به سری محدود و با استفاده از فرض خطی بودن معادله بدست آمده است.

$$e_r^{n+1} = S\left(e_{r-1}^n + e_{r+1}^n\right) + (1-2S)e_r^n \qquad e_r^n = G^n e^{i\beta rh}$$

$$G^{n+1}e^{i\beta rh} = S\left(G^n e^{i\beta(r-1)h} + G^n e^{i\beta(r+1)h}\right) + (1-2S)G^n e^{i\beta rh}$$

$$\div G^n e^{i\beta rh}$$

$$G = S\left(e^{-i\beta h} + e^{i\beta h}\right) + (1-2s)$$

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \\ e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$G = 2S\cos(\beta h) + 1 - 2S$$

$$G = 1 - 2S\left(1 - \cos(\beta h)\right)$$

روش ون نیومان

$$G = 1 - 2S\left(2\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)$$

$$G = 1 - 4S\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)$$

❑ برای پایداری باید $|G|\le 1$

$$\left|1 - 4S\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right| \le 1$$

$$-1 \le 1 - 4S\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \le 1 \qquad -2 \le -4S\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \le 0$$

$$\frac{1}{2} \ge S\sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \ge 0$$

❑ روش پایدار مشروط است $\boxed{\frac{1}{2} \ge S \ge 0}$

بررسی سازگاری روش FTCS

$$\text{PDE} \Rightarrow \text{FDE}$$

برای سازگاری باید با کوچک کردن گام $\text{FDE} \Rightarrow \text{PDE}$

$$f_i^{n+1} = S\left(f_{i-1}^n + f_{i+1}^n\right) + (1-2S)\, f_i^n$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \Delta t \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_i^n + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right|_i^n + \frac{(\Delta t)^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right|_i^n + \cdots$$

$$f_{i+1}^n = f_i^n + \Delta x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i^n + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_i^n + \frac{(\Delta x)^4}{4!}\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|_i^n + \cdots$$

$$f_{i-1}^n = f_i^n - \Delta x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i^n - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_i^n + \frac{(\Delta x)^4}{4!}\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|_i^n + \cdots$$

بررسی سازگاری روش FTCS

$$\cancel{f_i^n} + \Delta t \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_i^n + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right|_i^n + \frac{(\Delta t)^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}\right|_i^n + \cdots =$$

$$S\left(\begin{array}{l} \cancel{f_i^n} - \Delta x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i^n - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_i^n + \frac{(\Delta x)^4}{4!}\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|_i^n + \cdots \\ + \cancel{f_i^n} + \Delta x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i^n + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_i^n + \frac{(\Delta x)^4}{4!}\left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right|_i^n + \cdots \end{array}\right)$$

$$+(\cancel{1} - 2\cancel{S})\, f_i^n$$

$$\Delta t \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} + \cdots = S\left((\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{(\Delta x)^4}{4!}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \cdots\right)$$

بررسی سازگاری روش FTCS

$$\Delta t\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{(\Delta t)^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}+\cdots=$$

$$\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}\left((\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{(\Delta x)^4}{12}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+\cdots\right)$$

$\div\Delta t$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{(\Delta t)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}+\cdots=\frac{\alpha}{(\Delta x)^2}\left((\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{(\Delta x)^4}{4!}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+\cdots\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\alpha\frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+\frac{(\Delta t)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}-2\alpha\frac{(\Delta x)^4}{4!}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}+\cdots=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta t\rightarrow 0\\ \Delta x\rightarrow 0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$$

روش FTCS سازگار است.

قضیه هم‌ارزی Lax

- قضیه هم‌ارزی Lax:

برای هر مسئله مقدار اولیه مرزی خطی خوش وضع، یک طرح تفاضلات محدود سازگار، پایدار است، اگر و تنها اگر همگرا باشد.

❖ مسئله خوش‌وضع (Well-Condition) به ازای تغییرات کم ورودی، تغییرات کم در خروجی دارد. ولی مسئله بد وضع (Bad-Condition) با تغییرات کم در ورودی، دچار تغییرات شدید در خروجی می‌شود.

- از قضیه Lax با تقریب برای معادلات غیرخطی هم استفاده می‌شود.

درجه دقت (مرتبه همگرایی)

❑ روش MEPDE (Modified Equivalent Partial Differential Equation)

معادله هم‌ارزی معادل با یک معادله دیفرانسیلی جزیی

$$f_i^{n+1} = S\left(f_{i-1}^n + f_{i+1}^n\right) + \left(1-2S\right) f_i^n$$

❖مشابه مراحل ابتدای بررسی سازگاری

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} + \boxed{\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \alpha \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}} + \frac{(\Delta t)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} - 2\alpha \frac{(\Delta x)^4}{4!}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6} + \cdots = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \alpha^2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$$

درجه دقت (مرتبه همگرایی)

$$\boxed{\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \alpha \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}} = \frac{\Delta t}{2}\alpha^2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \alpha \frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$$

$$= \left(\frac{\Delta t}{2}\alpha^2 - \alpha \frac{(\Delta x)^2}{12}\right)\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \frac{\alpha (\Delta x)^2}{2}\left(\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{6}\right)\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$$

$$= \frac{\alpha (\Delta x)^2}{2}\left(S - \frac{1}{6}\right)\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$$

دانشگاه یزد دانشکده مهندسی عمران محمدرضا هادیان پاییز ۱۳۹۹

درجه دقت (مرتبه همگرایی)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}+\boxed{\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\alpha\frac{(\Delta x)^2}{12}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}}+\frac{(\Delta t)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}-2\alpha\frac{(\Delta x)^4}{4!}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}+\cdots=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\alpha(\Delta x)^2}{2}\left(S-\frac{1}{6}\right)\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}+\frac{(\Delta t)^2}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}-2\alpha\frac{(\Delta x)^4}{4!}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}+\cdots=0$$

- مرتبه دقت روش در حالت کلی ۲ است. $E=O\left((\Delta x)^2\right)$
- چون هر توان ۲ از گام مکانی معادل توان ۱ از گام زمانی است:

$$\boxed{E=O\left(\Delta t,(\Delta x)^2\right)}$$

- برای حالت خاص:

$$\boxed{S=\frac{1}{6}\quad\Rightarrow\quad E=O\left((\Delta x)^4\right)}$$

Any Question?