



هیدرولیک محاسباتی

معادله یک بعدی پخش (روش FTCS)

محمد رضا هادیان

دانشگاه یزد - دانشکده مهندسی عمران

شکل کلی معادله انتقال

□ معادله کلی انتقال اسکالر (Scalar Transport Equation):

شتاب موضعی (Local Acceleration)

جابجایی (Convection)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\phi u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\phi v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\phi w)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + S_\phi$$

پخش (Diffusion)

چشمه / چاه

(Source/Sink)

شکل ساده معادله انتقال

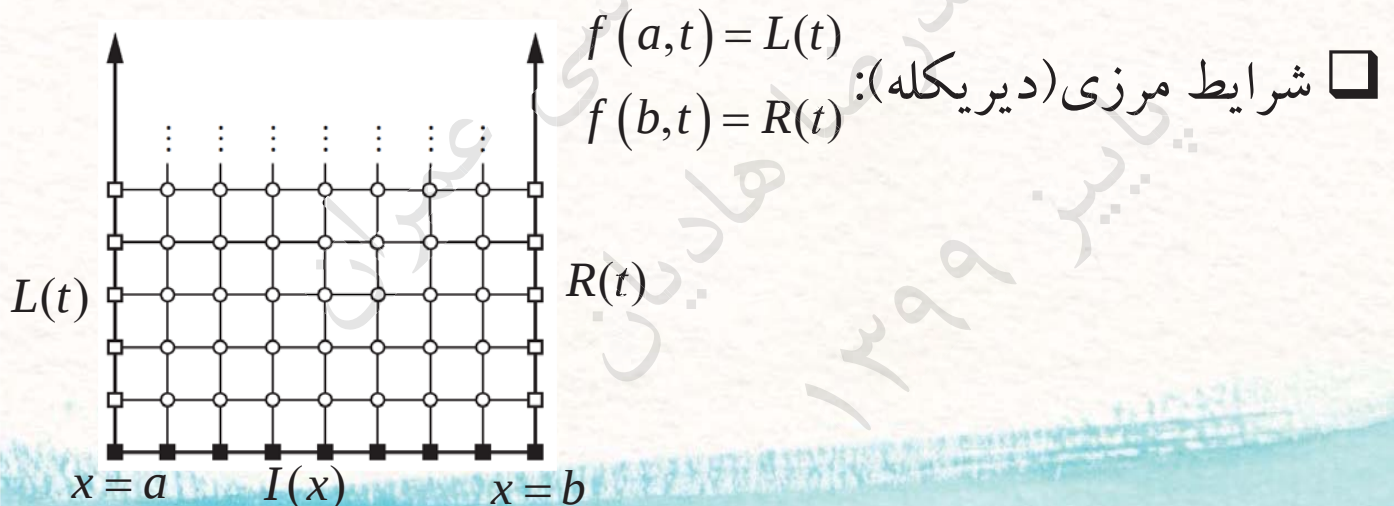
□ معادله مورد استفاده در درس:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \alpha_x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \alpha_z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + S_f$$

معادله یک بعدی پخش غیر ماندگار

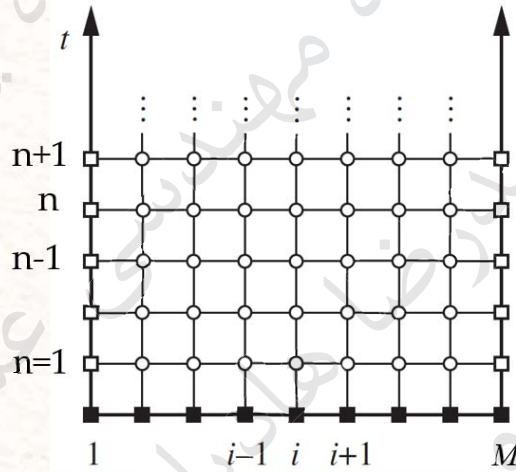
$$f_t = \alpha f_{xx} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad b \geq x \geq a \quad \square \text{ معادله حاکم:}$$

$$f(x, 0) = I(x) \quad \square \text{ شرط اولیه:}$$



روش کلاسیک صریح

- روش اولر پیشرو، سه نقطه‌ای کلاسیک، FTCS، (1,3)FTCS
- گسسته‌سازی میدان حل



$$\Delta x = \frac{b-a}{M-1}$$

روش کلاسیک صریح

- انتخاب فرمول مناسب برای مشتق‌ها

$$f_t = \alpha f_{xx}$$

$$f_t|_i^n = \alpha f_{xx}|_i^n$$

- ❖ روش پیشرو مرتبه یک برای مشتق زمانی (Forward Time)

$$f_t|_i^n \cong \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}, \quad O(\Delta t)$$

- ❖ روش مرکزی برای مشتق مکانی (Central Space)

$$f_{xx}|_i^n \cong \frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{(\Delta x)^2}, \quad O((\Delta x)^2)$$

روش کلاسیک صریح

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n) \quad S = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$f_i^{n+1} = f_i^n + S (f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n)$$

$$f_i^{n+1} = S (f_{i-1}^n + f_{i+1}^n) + (1 - 2S) f_i^n$$

روش کلاسیک صریح

$$f_i^{n+1} = S (f_{i-1}^n + f_{i+1}^n) + (1 - 2S) f_i^n$$

$$n=0 \quad f_i^1 = S (f_{i-1}^0 + f_{i+1}^0) + (1 - 2S) f_i^0$$

$$f_i^1 = S (g^0|_{i-1} + g^0|_{i+1}) + (1 - 2S) I|_i$$

$$f_i^1 = S (g_{i-1}^0 + g_{i+1}^0) + (1 - 2S) I_i$$

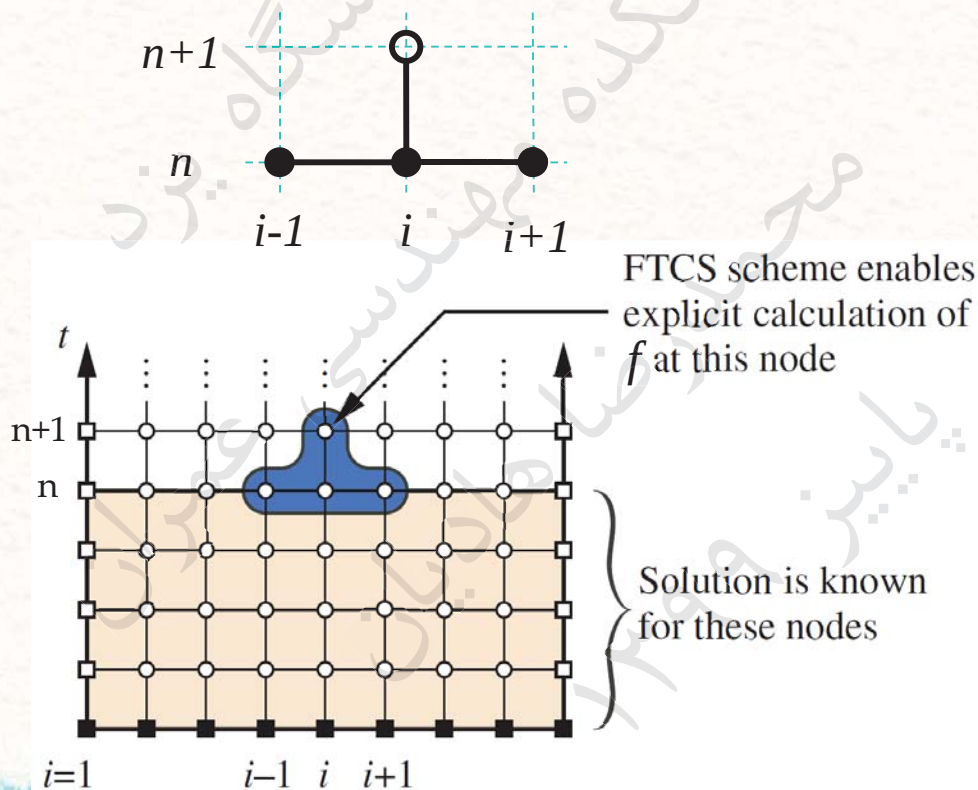
$$n=1 \quad f_i^2 = S (f_{i-1}^1 + f_{i+1}^1) + (1 - 2S) f_i^1$$

$$n=2 \quad f_i^3 = S (f_{i-1}^2 + f_{i+1}^2) + (1 - 2S) f_i^2$$

□ چون برای حل معادلات به دستگاه نیاز نداریم به روش کلاسیک صریح می‌گویند.

روش کلاسیک صریح

□ شابلن محاسباتی (Computational Stencil)



مثال ۱

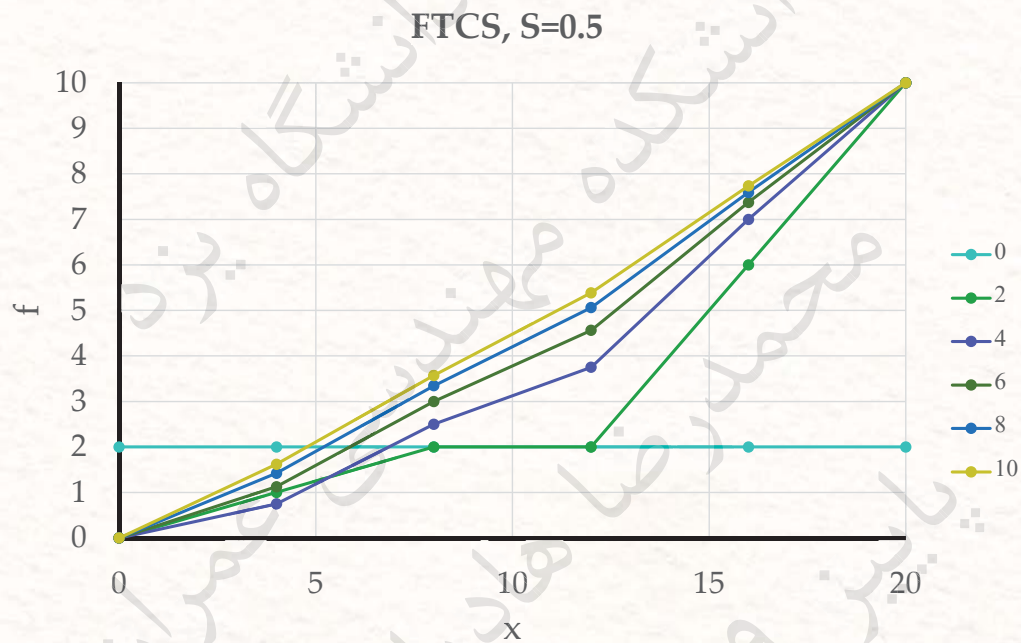
□ مثال: $f_t = \alpha f_{xx}$ $20 \geq x \geq 0$ $\alpha = \frac{5}{42}$ $\Delta t = 67.2$ $\Delta x = 4$

$f(x, 0) = 2$ $f(0, t) = 0$ $f(20, t) = 10$

$S = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{5}{42} \frac{67.2}{4^2} = 0.5$ $f_i^{n+1} = 0.5(f_{i-1}^n + f_{i+1}^n) + \underbrace{(1 - 2S)}_{=0} f_i^n$

		x					
n	t	0	4	8	12	16	20
0	0	2	2	2	2	2	2
1	67.2	0	2	2	2	2	10
2	134.4	0	1	2	2	6	10
3	201.6	0	1	1.5	4	6	10
4	268.8	0	0.75	2.5	3.75	7	10
5	336	0	1.25	2.25	4.75	6.875	10
6	403.2	0	1.125	3	4.563	7.375	10
7	470.4	0	1.5	2.844	5.188	7.281	10
8	537.6	0	1.422	3.344	5.063	7.594	10
9	604.8	0	1.672	3.242	5.469	7.531	10
10	672	0	1.621	3.57	5.387	7.734	10

مثال ۱



$$f(x, t) = \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} \left[4 + 16(-1)^n \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{20}\right) e^{-\frac{5 n^2 \pi^2}{42 \cdot 400} t} \right)$$

مثال ۲

$$f_t = \frac{1}{4} f_{xx} \quad 1 \geq x \geq 0 \quad \Delta x = 0.1$$

□ مثال:

$$f(x, 0) = \sin(\pi x) \quad f(0, t) = 0 \quad f(1, t) = 0$$

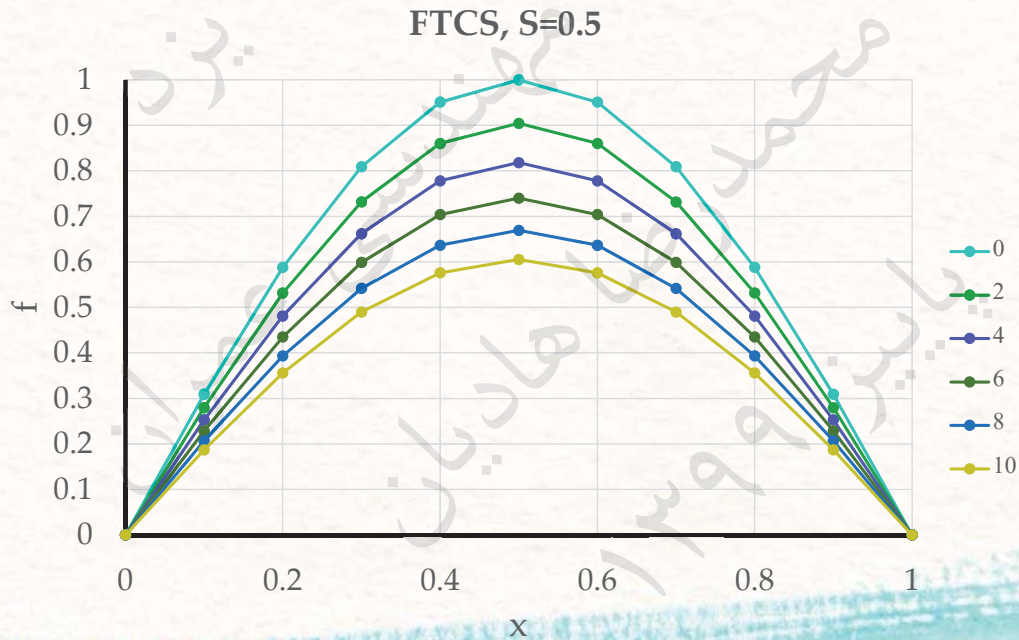
		S= 0.5					Dt= 0.02						
		x											
n	t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	
0	0	0	0.309	0.588	0.809	0.951	1	0.951	0.809	0.588	0.309	0	
1	0.02	0	0.294	0.559	0.769	0.905	0.951	0.905	0.769	0.559	0.294	0	
2	0.04	0	0.28	0.532	0.732	0.86	0.905	0.86	0.732	0.532	0.28	0	
3	0.06	0	0.266	0.506	0.696	0.818	0.86	0.818	0.696	0.506	0.266	0	
4	0.08	0	0.253	0.481	0.662	0.778	0.818	0.778	0.662	0.481	0.253	0	
5	0.1	0	0.24	0.457	0.629	0.74	0.778	0.74	0.629	0.457	0.24	0	
6	0.12	0	0.229	0.435	0.599	0.704	0.74	0.704	0.599	0.435	0.229	0	
7	0.14	0	0.217	0.414	0.569	0.669	0.704	0.669	0.569	0.414	0.217	0	
8	0.16	0	0.207	0.393	0.542	0.637	0.669	0.637	0.542	0.393	0.207	0	
9	0.18	0	0.197	0.374	0.515	0.605	0.637	0.605	0.515	0.374	0.197	0	
10	0.2	0	0.187	0.356	0.49	0.576	0.605	0.576	0.49	0.356	0.187	0	

مثال ۲

$$f_t = \frac{1}{4} f_{xx} \quad 1 \geq x \geq 0 \quad \Delta x = 0.1$$

□ مثال:

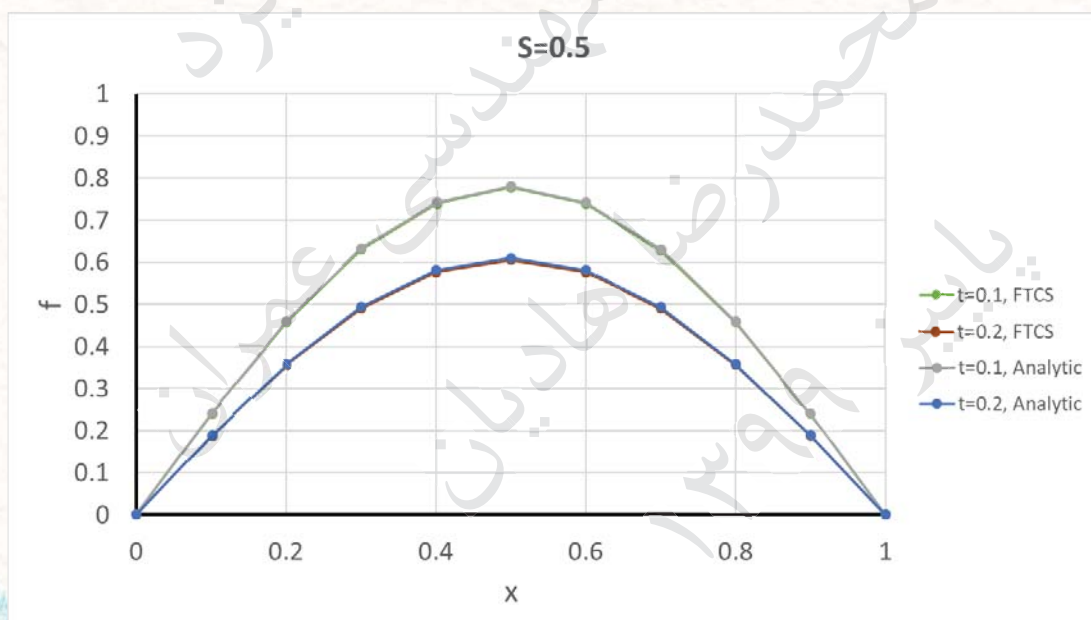
$$f(x, 0) = \sin(\pi x) \quad f(0, t) = 0 \quad f(1, t) = 0$$



مثال ۲

$$f(x, t) = e^{-\frac{\pi^2 t}{4}} \sin(\pi x) \quad \square \text{ جواب تحلیلی:}$$

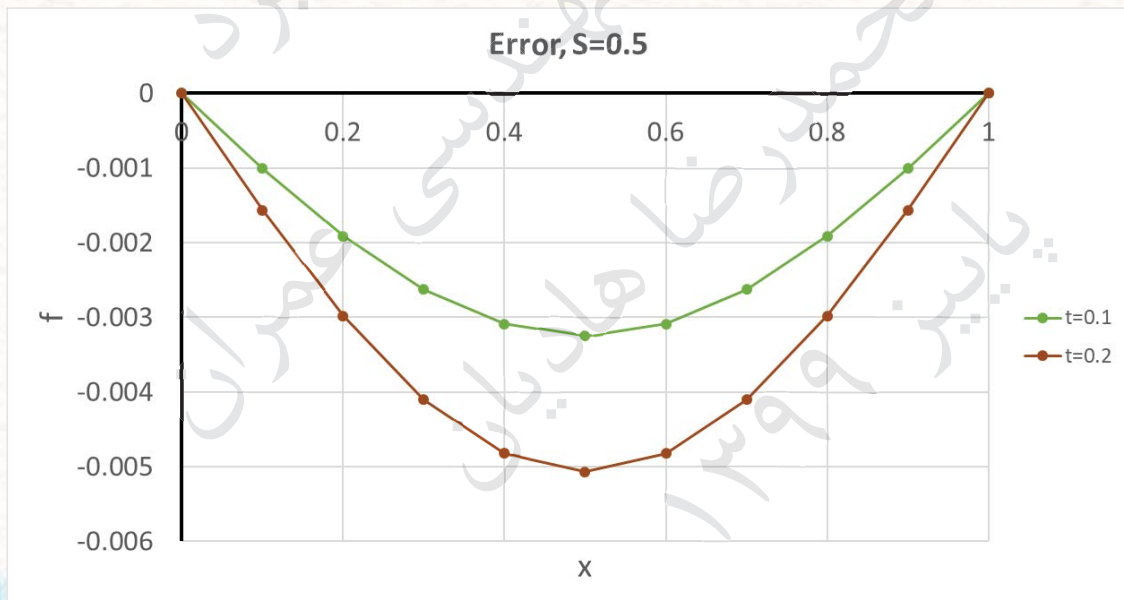
		x										
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Analytic	0.1	0	0.241	0.459	0.632	0.743	0.781	0.743	0.632	0.459	0.241	0
	0.2	0	0.189	0.359	0.494	0.581	0.61	0.581	0.494	0.359	0.189	0



مثال ۲

□ بررسی خطا: $Error = Numeric - Analytic$

		x										
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Error	0.1	0	-0.001	-0.002	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003	-0.002	-0.001	0
	0.2	0	-0.002	-0.003	-0.004	-0.005	-0.005	-0.005	-0.004	-0.003	-0.002	0



بیان یک مشکل

□ مقدار واقعی جواب برابر است با مقدار عددی با اضافه یک خطا

$$f_i^n = \tilde{f}_i^n + e_i^n$$

$$f_i^{n+1} = S(f_{i-1}^n + f_{i+1}^n) + (1-2S)f_i^n$$

$$\tilde{f}_i^{n+1} + e_i^{n+1} = S(\tilde{f}_{i-1}^n + e_{i-1}^n + \tilde{f}_{i+1}^n + e_{i+1}^n) + (1-2S)(\tilde{f}_i^n + e_i^n)$$

□ مقادیر $\tilde{f}$ از حل معادله تفاضل محدود بدست آمده‌اند.

$$\tilde{f}_i^{n+1} = S(\tilde{f}_{i-1}^n + \tilde{f}_{i+1}^n) + (1-2S)\tilde{f}_i^n$$

$$e_i^{n+1} = S(e_{i-1}^n + e_{i+1}^n) + (1-2S)e_i^n$$

بیان یک مشکل

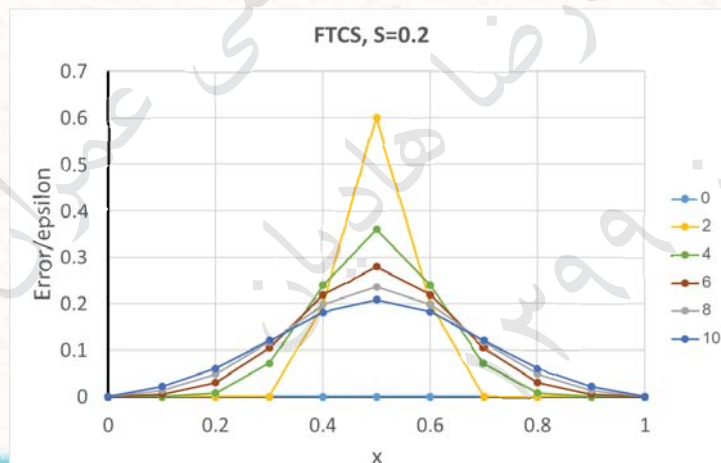
□ اگر در اولین گام در یک نقطه خطایی به اندازه ε وارد شود.

$$e_i^{n+1} = S(e_{i-1}^n + e_{i+1}^n) + (1 - 2S)e_i^n$$

		S= 0.2					Δt= 0.008					
		x										
n	t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.008	0	0	0	0	0	1ε	0	0	0	0	0
2	0.016	0	0	0	0	0.2ε	0.6ε	0.2ε	0	0	0	0
3	0.024	0	0	0	0.04ε	0.24ε	0.44ε	0.24ε	0.04ε	0	0	0
4	0.032	0	0	0.008ε	0.072ε	0.24ε	0.36ε	0.24ε	0.072ε	0.008ε	0	0
5	0.04	0	0.0016ε	0.0192ε	0.0928ε	0.2304ε	0.312ε	0.2304ε	0.0928ε	0.0192ε	0.0016ε	0

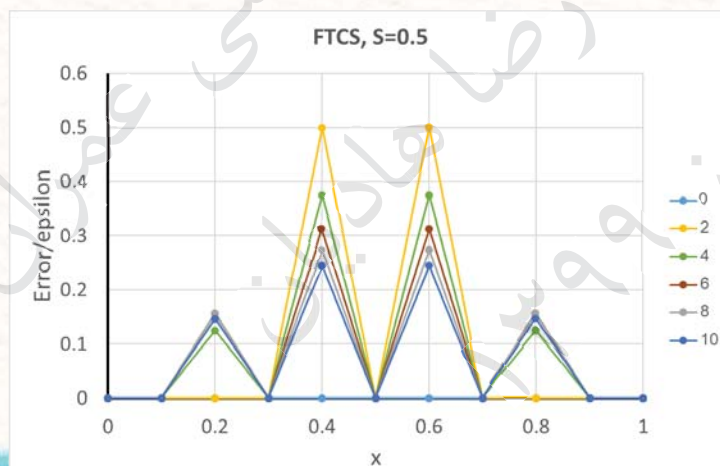
بیان یک مشکل

		S= 0.2					Dt= 0.008							
		x												
n	t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	0.008	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		
2	0.016	0	0	0	0	0.2	0.6	0.2	0	0	0	0		
3	0.024	0	0	0	0.04	0.24	0.44	0.24	0.04	0	0	0		
4	0.032	0	0	0.008	0.072	0.24	0.36	0.24	0.072	0.008	0	0		
5	0.04	0	0.002	0.019	0.093	0.23	0.312	0.23	0.093	0.019	0.002	0		
6	0.048	0	0.005	0.03	0.106	0.219	0.279	0.219	0.106	0.03	0.005	0		
7	0.056	0	0.009	0.04	0.113	0.209	0.255	0.209	0.113	0.04	0.009	0		
8	0.064	0	0.013	0.049	0.118	0.199	0.237	0.199	0.118	0.049	0.013	0		
9	0.072	0	0.018	0.055	0.12	0.19	0.221	0.19	0.12	0.055	0.018	0		
10	0.08	0	0.022	0.061	0.121	0.182	0.209	0.182	0.121	0.061	0.022	0		



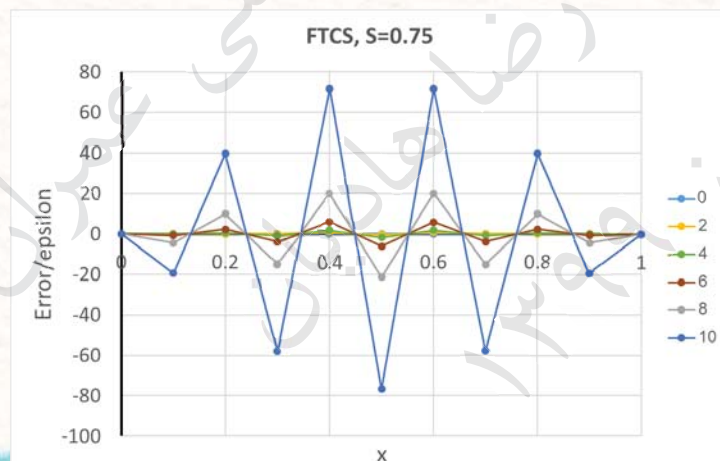
بیان یک مشکل

		S= 0.5					Dt= 0.02							
		x												
n	t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	0.02	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		
2	0.04	0	0	0	0	0.5	0	0.5	0	0	0	0		
3	0.06	0	0	0	0.25	0	0.5	0	0.25	0	0	0		
4	0.08	0	0	0.125	0	0.375	0	0.375	0	0.125	0	0		
5	0.1	0	0.063	0	0.25	0	0.375	0	0.25	0	0.063	0		
6	0.12	0	0	0.156	0	0.313	0	0.313	0	0.156	0	0		
7	0.14	0	0.078	0	0.234	0	0.313	0	0.234	0	0.078	0		
8	0.16	0	0	0.156	0	0.273	0	0.273	0	0.156	0	0		
9	0.18	0	0.078	0	0.215	0	0.273	0	0.215	0	0.078	0		
10	0.2	0	0	0.146	0	0.244	0	0.244	0	0.146	0	0		



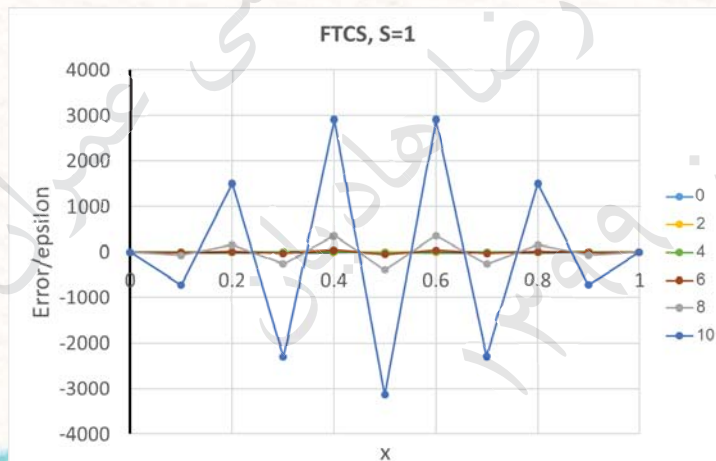
بیان یک مشکل

		S= 0.75					Dt= 0.03							
		x												
n	t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	0.03	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		
2	0.06	0	0	0	0	0.75	-0.5	0.75	0	0	0	0		
3	0.09	0	0	0	0.563	-0.75	1.375	-0.75	0.563	0	0	0		
4	0.12	0	0	0.422	-0.844	1.828	-1.813	1.828	-0.844	0.422	0	0		
5	0.15	0	0.316	-0.844	2.109	-2.906	3.648	-2.906	2.109	-0.844	0.316	0		
6	0.18	0	-0.791	2.241	-3.867	5.771	-6.184	5.771	-3.867	2.241	-0.791	0		
7	0.21	0	2.076	-4.614	7.943	-10.42	11.75	-10.42	7.943	-4.614	2.076	0		
8	0.24	0	-4.499	9.822	-15.25	19.98	-21.51	19.98	-15.25	9.822	-4.499	0		
9	0.27	0	9.616	-19.72	29.98	-37.56	40.73	-37.56	29.98	-19.72	9.616	0		
10	0.3	0	-19.6	39.56	-57.95	71.81	-76.7	71.81	-57.95	39.56	-19.6	0		



بیان یک مشکل

				S= 1					Dt= 0.04				
		x											
n	t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0.04	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
2	0.08	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	
3	0.12	0	0	0	1	-2	3	-2	1	0	0	0	
4	0.16	0	0	1	-3	6	-7	6	-3	1	0	0	
5	0.2	0	1	-4	10	-16	19	-16	10	-4	1	0	
6	0.24	0	-5	15	-30	45	-51	45	-30	15	-5	0	
7	0.28	0	20	-50	90	-126	141	-126	90	-50	20	0	
8	0.32	0	-70	160	-266	357	-393	357	-266	160	-70	0	
9	0.36	0	230	-496	783	-1016	1107	-1016	783	-496	230	0	
10	0.4	0	-726	1509	-2295	2906	-3139	2906	-2295	1509	-726	0	



Any
Question?