هیدرولیک محاسباتی

عملگرهای تفاضل محدود

محمدرضا هادیان
دانشگاه یزد- دانشکده مهندسی عمران

مقدمه

- روش بسط تیلور برای استخراج روابط تفاضلات محدود مشتق‌ها سخت و وقت‌گیر است.
- راحت‌ترین روش برای استخراج روابط استفاده از عملگرهای تفاضلات محدود (Finite Difference Operators) است.

عملگر انتقال

- عملگر انتقال (E)

$$Ef(x) = f(x+h)$$

$$f_i = f(x) \qquad Ef_i = f_{i+1}$$

$$E^k f_i = f_{i+k}$$

$$E^{\frac{1}{2}} f_i = f_{i+\frac{1}{2}}$$

عملگر تفاضلات پیش‌رو

- عملگر تفاضلات پیش‌رو (Forward Difference Operator)

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \qquad \Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

$$= (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i)$$

$$= f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}$$

دانشگاه یزد
دانشکده مهندسی عمران
محمدرضا هادیان
پاییز ۱۳۹۹

عملگر تفاضلات پیش‌رو

$$\Delta^3 f_i = \Delta\left(\Delta^2 f_i\right) = \Delta\left(f_i - 2 f_{i+1} + f_{i+2} \right)$$
$$= \Delta f_i - 2\Delta f_{i+1} + \Delta f_{i+2}$$
$$= \left(f_{i+1} - f_i \right) - 2\left(f_{i+2} - f_{i+1} \right) + \left(f_{i+3} - f_{i+2} \right)$$
$$= - f_i + 3 f_{i+1} - 3 f_{i+2} + f_{i+3}$$

عملگر تفاضلات پس‌رو

❑ عملگر تفاضلات پس‌رو (Bachward Difference Operator)

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h) \qquad \nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

$$\nabla^2 f_i = \nabla\left(\nabla f_i\right) = \nabla\left(f_i - f_{i-1} \right) = \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$$
$$= \left(f_i - f_{i-1} \right) - \left(f_{i-1} - f_{i-2} \right)$$
$$= f_{i-2} - 2 f_{i-1} + f_i$$

عملگر تفاضلات پس‌رو

$$\nabla^3 f_i = \nabla\left(\nabla^2 f_i\right) = \nabla\left(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i\right)$$
$$= \nabla f_{i-2} - 2\nabla f_{i-1} + \nabla f_i$$
$$= \left(f_{i-2} - f_{i-3}\right) - 2\left(f_{i-1} - f_{i-2}\right) + \left(f_i - f_{i-1}\right)$$
$$= -f_{i-3} + 3f_{i-2} - 3f_{i-1} + f_i$$

عملگر تفاضلات مرکزی

- عملگر تفاضلات مرکزی (Central Difference Operator)

$$\delta f(x) = f\left(x + \tfrac{1}{2}h\right) - f\left(x - \tfrac{1}{2}h\right)$$

$$\delta f_i = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}$$

$$\delta^2 f_i = \delta\left(\delta f_i\right) = \delta\left(f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \delta f_{i+\frac{1}{2}} - \delta f_{i-\frac{1}{2}}$$
$$= \left(f_{i+1} - f_i\right) - \left(f_i - f_{i-1}\right)$$
$$= f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}$$

دانشگاه یزد دانشکده مهندسی عمران محمدرضا هادیان پاییز ۱۳۹۹

سایر عملگرهای تفاضل محدود

- عملگر میانگین

$$\mu f(x)=\frac{f\left(x-\frac{1}{2}h\right)+f\left(x+\frac{1}{2}h\right)}{2}$$

$$\mu f_i=\frac{f_{i-\frac{1}{2}}+f_{i+\frac{1}{2}}}{2}$$

- عملگر مشتق

$$Df(x)=\frac{\partial f}{\partial x}$$

- عملگر انتگرال

$$If(x)=\int f(x)\,dx$$

ارتباط بین عملگرهای تفاضل محدود

$$\Delta f(x)=f\left(x+h\right)-f(x)=Ef(x)-f(x)=\left(E-1\right)f(x)$$

$$\boxed{\Delta=E-1}$$

$$\nabla f(x)=f\left(x\right)-f(x-h)=f(x)-E^{-1}f(x)=\left(1-E^{-1}\right)f(x)$$

$$\boxed{\nabla=1-E^{-1}}$$

$$\boxed{\mu=\frac{1}{2}\left(E^{-\frac{1}{2}}+E^{\frac{1}{2}}\right)}$$

$$\boxed{\delta=E^{\frac{1}{2}}-E^{-\frac{1}{2}}}$$

ارتباط بین عملگرهای تفاضل محدود

$$\boxed{E = e^{hD}}$$

❑ اثبات:

$$Ef(x) = f(x+h)$$

$$= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \cdots$$

$$= f(x) + hDf(x) + \frac{h^2}{2!} D^2 f(x) + \frac{h^3}{3!} D^3 f(x) +$$

$$\cdots + \frac{h^n}{n!} D^n f(x) + \cdots$$

$$= \left[1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \frac{h^3 D^3}{3!} + \cdots + \frac{h^n D^n}{n!} + \cdots\right] f(x) = e^{hD} f(x)$$

محاسبه مشتق اول به روش پیش‌رو

$$E = e^{hD} \Rightarrow D = \frac{1}{h} \ln(E)$$

$$f'(x) = Df(x) = \frac{1}{h} \ln(E) f(x)$$

$$E = \Delta + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{h} \ln(1+\Delta) f(x)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \cdots\right] f(x)}$$

محاسبه مشتق اول به روش پیش‌رو

$$f'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^3}{3}-\frac{\Delta^4}{4}+\cdots\right]f(x)$$

❑ مرتبه دقت ۱:

$$f'(x)\cong\frac{1}{h}\Delta f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\cong\frac{f_{i+1}-f_i}{h},\ O(h)$$

محاسبه مشتق اول به روش پیش‌رو

$$f'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta-\frac{\Delta^2}{2}+\frac{\Delta^3}{3}-\frac{\Delta^4}{4}+\cdots\right]f(x)$$

❑ مرتبه دقت ۲:

$$f'(x)\cong\frac{1}{h}\left[\Delta-\frac{\Delta^2}{2}\right]f_i$$

$$\cong\frac{1}{h}\left[\left(f_{i+1}-f_i\right)-\frac{f_i-2f_{i+1}+f_{i+2}}{2}\right]$$

$$\cong\frac{-3f_i+4f_{i+1}-f_{i+2}}{2h},\ O\left(h^2\right)$$

محاسبه مشتق اول به روش پیش‌رو

- با اضافه کردن هر ترم، یک درجه مرتبه دقت افزایش می‌یابد.
- با توجه به نحوه انجام محاسبات و ذخیره اعداد در کامپیوتر از مرتبه ۴ یا ۶ به بعد فایده‌ای ندارد.

محاسبه مشتق اول به روش پس‌رو

$$E = e^{hD} \Rightarrow D = \frac{1}{h}\ln(E)$$

$$f'(x) = Df(x) = \frac{1}{h}\ln(E)\,f(x)$$

$$E = (1-\nabla)^{-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{h}\ln\left((1-\nabla)^{-1}\right) f(x)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \cdots\right] f(x)}$$

محاسبه مشتق اول به روش پس‌رو

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \cdots\right] f(x)$$

- مرتبه دقت ۱:

$$f'(x) \cong \frac{1}{h}\nabla f_i$$

$$\cong \frac{f_i - f_{i-1}}{h},\ O(h)$$

محاسبه مشتق اول به روش پس‌رو

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \cdots\right] f(x)$$

- مرتبه دقت ۲:

$$f'(x) \cong \frac{1}{h}\left[\nabla + \frac{\nabla^2}{2}\right] f_i$$

$$\cong \frac{1}{h}\left[\left(f_i - f_{i-1}\right) + \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{2}\right]$$

$$\cong \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i}{h},\ O\left(h^2\right)$$

محاسبه مشتق اول به روش پس‌رو

$$f'(x)=\frac{1}{h}\left[\nabla+\frac{\nabla^2}{2}+\frac{\nabla^3}{3}+\frac{\nabla^4}{4}+\cdots\right]f(x)$$

- مرتبه دقت ۳:

$$f'(x)\cong\frac{-2f_{i-3}+9f_{i-2}-18f_{i-1}+11f_i}{6h},\ O\left(h^3\right)$$

- نکته: مجموع ضرائب مشتق صفر است. چون مشتق تابع مقدار ثابت صفر است.

محاسبه مشتق اول به روش مرکزی

$$\delta=E^{\frac{1}{2}}-E^{-\frac{1}{2}}$$

$$E=e^{hD}$$

$$\delta=e^{\frac{hD}{2}}-e^{-\frac{hD}{2}}=2\frac{e^{\frac{hD}{2}}-e^{-\frac{hD}{2}}}{2}$$

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\delta=2\sinh\left(\frac{hD}{2}\right)$$

$$D=\frac{2}{h}\sinh^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

محاسبه مشتق اول به روش مرکزی

$$f'(x)=\frac{1}{h}\left[\delta-\frac{1}{24}\delta^3+\frac{3}{640}\delta^5-\frac{5}{7168}\delta^7+\cdots\right]f(x)$$

- مرتبه دقت ۲:

$$f'(x)\cong\frac{1}{h}\delta f_i=\frac{f_{i+\frac{1}{2}}-f_{i-\frac{1}{2}}}{h}$$

- اگر گام را 2h در نظر بگیریم:

$$f'(x)\cong\frac{1}{2h}\delta f_i=\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}$$

- در روش مرکزی با اضافه کردن هر ترم، به مرتبه دقت ۲ افزوده می‌شود.

مشتق مرتبه دوم به روش پیش‌رو

$$D=\frac{1}{h}\ln\left(1+\Delta\right) \qquad D^2=\frac{1}{h^2}\left[\ln\left(1+\Delta\right)\right]^2$$

$$f''(x)=D^2f(x)=\frac{1}{h^2}\left[\ln\left(1+\Delta\right)\right]^2f(x)$$

$$f''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2-\Delta^3+\frac{11}{12}\Delta^4-\frac{5}{6}\Delta^5+\frac{137}{180}\Delta^6-\cdots\right]f(x)$$

$$f''(x)\cong\frac{1}{h^2}\Delta^2f_i=\frac{f_i-2f_{i+1}+f_{i+2}}{h^2},O(h)$$

$$f''(x)\cong\frac{2f_i-5f_{i+1}+4f_{i+2}-f_{i+3}}{h^2},\quad O\left(h^2\right)$$

مشتق مرتبه دوم به روش پس‌رو

$$D = \frac{1}{h}\ln\left((1-\nabla)^{-1}\right) \qquad D^2 = \frac{1}{h^2}\left[\ln\left((1-\nabla)^{-1}\right)\right]^2$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4 + \frac{5}{6}\nabla^5 + \frac{137}{180}\nabla^6 + \cdots\right] f(x)$$

$$f''(x) \cong \frac{-f_{i-3} + 4f_{i-2} - 5f_{i-1} + 2f_i}{h^2}, \quad O\left(h^2\right)$$

مشتق مرتبه دوم به روش مرکزی

$$D = \frac{2}{h}\sinh^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right) \qquad D^2 = \frac{4}{h^2}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]^2$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\delta^2 - \frac{1}{12}\delta^4 + \frac{1}{90}\delta^6 - \frac{1}{560}\delta^8 + \cdots\right] f(x)$$

مشتق مرتبه سوم

$$D^3 = \frac{1}{h^3}\Big[\ln\left(1+\Delta\right)\Big]^3$$

$$D^3 = \frac{1}{h^3}\Big[\ln\left(\left(1-\nabla\right)^{-1}\right)\Big]^3$$

$$D^3 = \frac{8}{h^3}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]^3$$

مشتق مرتبه سوم

$$f'''(x) = \frac{1}{h^3}\left[\Delta^3 - \frac{3}{2}\Delta^4 + \frac{7}{4}\Delta^5 - \frac{15}{8}\Delta^6 - \cdots\right] f(x)$$

$$f'''(x) = \frac{1}{h^3}\left[\nabla^3 + \frac{3}{2}\nabla^4 + \frac{7}{4}\nabla^5 + \frac{15}{8}\nabla^6 - \cdots\right] f(x)$$

$$f'''(x) = \frac{1}{h^3}\left[\delta^3 - \frac{1}{8}\delta^5 + \frac{37}{1920}\delta^7 - \frac{3229}{967680}\delta^9 + \cdots\right] f(x)$$

دانشگاه یزد
دانشکده مهندسی عمران
محمدرضا هادیان
پاییز ۱۳۹۳

مثال مشتق مرتبه سوم

$$f'''(x) \cong \frac{-f_i + 3f_{i+1} - 3f_{i+2} + f_{i+3}}{h^3}, \quad O(h)$$

$$f'''(x) \cong \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{2h^3}, \quad O(h^2)$$

مشتق مرتبه چهارم

$$D^4 = \frac{1}{h^4}\left[\ln(1+\Delta)\right]^4$$

$$D^4 = \frac{1}{h^4}\left[\ln\left((1-\nabla)^{-1}\right)\right]^4$$

$$D^4 = \frac{16}{h^4}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]^4$$

دانشگاه یزد
دانشکده مهندسی عمران
محمدرضا هادیان
پاییز ۱۳۹۹

مشتق مرتبه چهارم

$$f^{(IV)}(x)=\frac{1}{h^4}\left[\Delta^4-2\Delta^5+\frac{17}{6}\Delta^6-\frac{7}{2}\Delta^7+\cdots\right]f(x)$$

$$f^{(IV)}(x)=\frac{1}{h^4}\left[\nabla^4+2\nabla^5+\frac{17}{6}\nabla^6+\frac{7}{2}\nabla^7+\cdots\right]f(x)$$

$$f^{(IV)}(x)=\frac{1}{h^4}\left[\delta^4-\frac{1}{6}\delta^6+\frac{7}{240}\delta^8-\frac{41}{7560}\delta^{10}+\cdots\right]f(x)$$

مثال مشتق مرتبه چهارم

$$f^{(IV)}(x)\cong\frac{f_{i-2}-4f_{i-1}+6f_i-4f_{i+1}+f_{i+2}}{2h^3},\quad O\left(h^2\right)$$

دانشگاه یزد
دانشکده مهندسی عمران
محمدرضا هادیان
پاییز ۱۳۹۹

انجام محاسبات در MAPLE

$$series\left(\left(\ln(1+\mathrm{Delta})\right)^4, \mathrm{Delta}, 10\right);$$

$$\Delta^4 - 2\,\Delta^5 + \frac{17}{6}\,\Delta^6 - \frac{7}{2}\,\Delta^7 + \frac{967}{240}\,\Delta^8 - \frac{89}{20}\,\Delta^9 + \mathrm{O}\left(\Delta^{10}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

$$series\left(\left(\ln\left(\frac{1}{1-Nabla}\right)\right)^4, Nabla, 10\right);$$

$$\nabla^4 + 2\,\nabla^5 + \frac{17}{6}\,\nabla^6 + \frac{7}{2}\,\nabla^7 + \frac{967}{240}\,\nabla^8 + \frac{89}{20}\,\nabla^9 + \mathrm{O}\left(\nabla^{10}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

$$series\left(\left(2\,\mathrm{arcsinh}\left(\frac{\mathrm{delta}}{2}\right)\right)^4, \mathrm{delta}, 16\right)$$

$$\delta^4 - \frac{1}{6}\,\delta^6 + \frac{7}{240}\,\delta^8 - \frac{41}{7560}\,\delta^{10} + \frac{479}{453600}\,\delta^{12} - \frac{59}{277200}\,\delta^{14} + \mathrm{O}\left(\delta^{16}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

Any Question?