دانشگاه یزد

هیدرولیک محاسباتی

مبانی روش تفاضلات محدود

محمدرضا هادیان

دانشگاه یزد- دانشکده مهندسی عمران

مبانی روش تفاضلات محدود

- هدف: PDE → FDE
- اساس کار در تفاضلات محدود سری تیلور است.
- برای تابع تک متغیره، بسط تیلور حول نقطه x_0:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta x\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0}+\frac{(\Delta x)^3}{3!}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{x_0}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(\Delta x)^n}{n!}\left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x_0}+\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!}\left.\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}\right|_{\xi}$$

$$(x_0+\Delta x>\xi>x_0)$$

مبانی روش تفاضلات محدود

❑برای توابع دومتغیره، می‌توان مشابه یک‌متغیره عمل کرد:

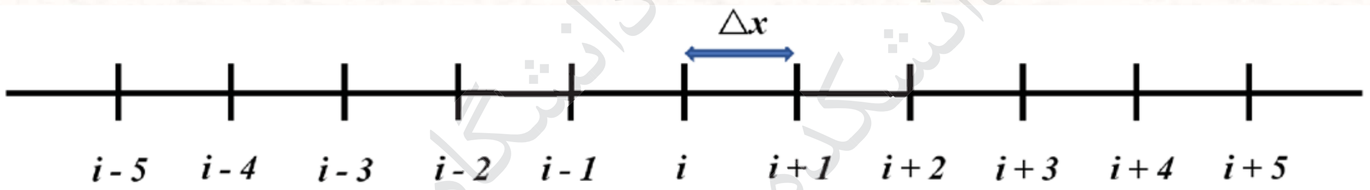
$$f\left(x_0+\Delta x, y_0\right)=f\left(x_0, y_0\right)+\Delta x \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0, y_0}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0, y_0}+\frac{(\Delta x)^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_0, y_0}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(\Delta x)^n}{n!}\left.\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right|_{x_0, y_0}+\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!}\left.\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\right|_{\xi, y_0}$$

$$\left(x_0+\Delta x>\xi>x_0\right)$$

❖ دقت شود که تعریف سری تیلور در مراجع ریاضی برای درجه ۱ و ۲ متفاوت با تعریف فوق است و مشتقات هر دو متغیر درگیر می‌شود.

مبانی روش تفاضلات محدود



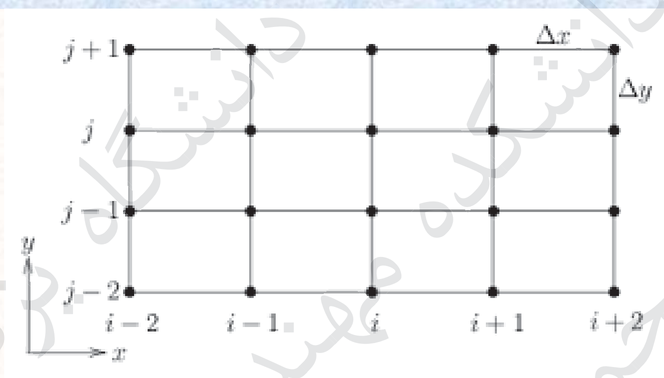
$$f_{i+1}=f_i\left(x_0\right)+\Delta x\left.\frac{df}{dx}\right|_i+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_i+\frac{(\Delta x)^3}{3!}\left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_i+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(\Delta x)^n}{n!}\left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_i+\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!}\left.\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}\right|_{i+k}$$

$$(1>k>0)$$

دانشگاه یزد دانشکده مهندسی عمران محمدرضا هادیان پاییز ۱۳۹۹

مبانی روش تفاضلات محدود



$$f_{i+1,j}=f_{i,j}+\Delta x\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j}+\frac{(\Delta x)^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{i,j}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(\Delta x)^n}{n!}\left.\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right|_{i,j}+\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!}\left.\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\right|_{i+k,j}$$

$$(1>k>0)$$

مبانی روش تفاضلات محدود

$$f_{i+1,j}=f_{i,j}+\Delta x\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,j}+\frac{(\Delta x)^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{i,j}+\cdots+\frac{(\Delta x)^n}{n!}\left.\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right|_{i,j}+\underbrace{O(\Delta x)^{n+1}}_{H.O.T}$$

$$|H.O.T|\le K|\Delta x|^{n+1}$$

- ❑ باحذف جملات سری از یک جایی به بعد خطای قطع دنباله (Truncation Error) ایجاد می‌شود.

دانشگاه یزد دانشکده مهندسی عمران محمدرضا هادیان پاییز ۱۳۹۹

مبانی روش تفاضلات محدود

- انتخاب فرمول مناسب برای محاسبه تقریبی مشتق
  - مرتبه دقت
  - درجه همگرایی
  - جهت پیش‌رو، پس‌رو، مرکزی
  - تعداد نقاط درگیر در فرمول

محاسبه تقریبی مشتق اول

- استفاده از بسط تیلور برای محاسبه مشتق اول:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta x\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{\xi}$$

$$f(x+h)=f(x)+h\,f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(\xi)\quad,\quad x+h>\xi>x$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{h}{2}f''(\xi)$$

- روش پیش‌رو (Forward) برای محاسبه مشتق اول:

$$\boxed{f'(x)\cong\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}\qquad E=\left|\frac{h}{2}f''(\xi)\right|=Kh=O(h)$$

$$\boxed{f_i'\cong\frac{f_{i+1}-f_i}{h}}$$

دانشگاه یزد
دانشکده مهندسی عمران
محمدرضا هادیان
پاییز ۱۳۹۹

محاسبه تقریبی مشتق اول

❑ روش پس‌رو (Backward) برای محاسبه مشتق اول:

$$f(x-h)=f(x)-h\,f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(\xi)\quad,\quad x>\xi>x-h$$

$$f'(x)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}+\frac{h}{2}f''(\xi)$$

$$\boxed{f'(x)\cong\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\quad,E=O(h)}\qquad\qquad \boxed{f'(x)\cong\frac{f_i-f_{i-1}}{h}}$$

محاسبه تقریبی مشتق اول

❑ روش مرکزی (Central) برای محاسبه مشتق اول:

$$f(x+h)=f(x)+h\,f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f''''(\xi_1)\;,x+h>\xi_1>x$$

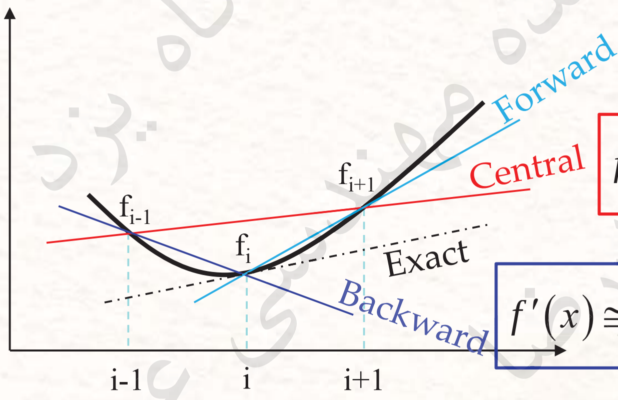
$$f(x-h)=f(x)-h\,f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f''''(\xi_2)\;,x>\xi_2>x-h$$

$$f(x+h)-f(x-h)=2h\,f'(x)+\frac{h^3}{3!}\left(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right)$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{h^2}{12}\left(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right)$$

$$\boxed{f'(x)\cong\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\quad,E=O(h^2)}\qquad\qquad \boxed{f'(x)\cong\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}}$$

محاسبه تقریبی مشتق اول



$$f'(x) \cong \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

$$f'(x) \cong \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

$$f'(x) \cong \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$$

محاسبه تقریبی مشتق دوم

- روش مرکزی (Central) برای محاسبه مشتق دوم:

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f''''(\xi_1) \quad , x+h > \xi_1 > x$$

$$f(x-h) = f(x) - h\,f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f''''(\xi_2) \quad , x > \xi_2 > x-h$$

$$f(x-h) + f(x+h) = 2f(x) + h^2\, f''(x) + \frac{h^4}{12}\left(f''''(\xi_1) + f''''(\xi_2)\right)$$

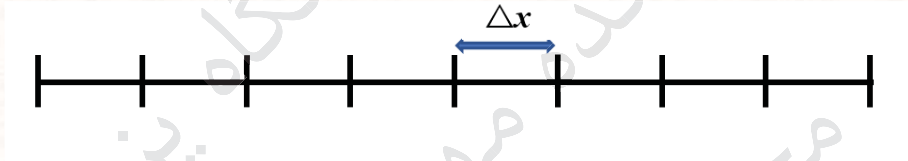
$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\left(f''''(\xi_1) + f''''(\xi_2)\right)$$

$$f''(x) \cong \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \quad , E = O(h^2)$$

$$f''(x) \cong \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$$

محاسبه تقریبی مشتق اول

- لزوم داشتن فرمول برای محاسبه مشتق در جهت‌های مختلف



- فرمول برای محاسبه مشتق اول پیش‌رو و پس‌رو با دقت مرتبه ۲؟

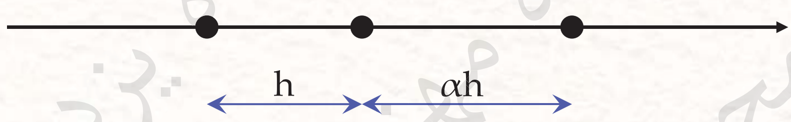
تکلیف

$$f'(x) \cong \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h} + O(h^2)$$

$$f'(x) \cong \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_{i+1}}{2h} + O(h^2)$$

محاسبه تقریبی مشتق اول

- محاسبه مشتق روی شبکه غیر یکنواخت؟ (مطالعه توسط خودتان)



محاسبه تقریبی مشتق اول تابع با دو متغیر

❑ محاسبه مشتق روی تابع با دو متغیر یا بیشتر، برای همان جهت و مشابه تابع تک متغیره عمل می‌شود.

$$f\left(x,y\right)$$

❖ مشتق اول تابع دو متغیره f نسبت به x به روش پس‌رو:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{i,j}=\frac{f_{i,j}-f_{i-1,j}}{\Delta x}+O\left(\Delta x\right)$$

❖ مشتق اول تابع دو متغیره f نسبت به y به روش پیش‌رو:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j}=\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j}}{\Delta y}+O\left(\Delta y\right)$$

❖ مشتق اول تابع دو متغیره f نسبت به y به روش مرکزی:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j}=\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta y}+O\left(\Delta y\right)^2$$

محاسبه مشتق ترکیبی تابع با دو متغیر

❑ مطلوب است محاسبه $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ با روش پیش‌رو مرتبه اول در جهت x و مرکزی مرتبه دوم در جهت y:

$$g=\frac{\partial f}{\partial y}\qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{i,j}=\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{i,j}\qquad \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{i,j}\cong\frac{g_{i+1,j}-g_{i,j}}{\Delta x}$$

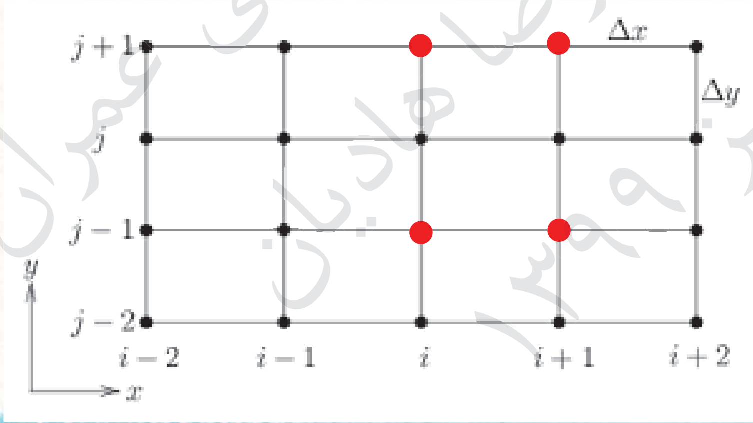
$$g_{i,j}=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,j}\cong\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta y}\qquad g_{i+1,j}=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i+1,j}\cong\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}}{2\Delta y}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{i,j}=\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{i,j}\cong\frac{\dfrac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}}{2\Delta y}-\dfrac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta y}}{\Delta x}=\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}-f_{i,j+1}+f_{i,j-1}}{2.\Delta x.\Delta y}$$

محاسبه مشتق ترکیبی تابع با دو متغیر

- مطلوب است محاسبه $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ با روش پیش‌رو مرتبه اول در جهت x و مرکزی مرتبه دوم در جهت y:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{i,j} \cong \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i,j+1} + f_{i,j-1}}{2.\Delta x.\Delta y}, \qquad E = O\left(\Delta x, (\Delta y)^2\right)$$



Any Question?