



هیدرولیک محاسباتی

تقسیم بندی معادلات

محمدرضا هادیان

دانشگاه یزد - دانشکده مهندسی عمران

طبقه بندی معادلات

□ متغیرهای مستقل (independent variable)

❖ مکان $f(x,y,z)$

❖ مکان و زمان $f(x,y,z,t)$

□ مثال هایی از معادلات:

❖ آبهای زیرزمینی ماندگار

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^2 f = 0$$

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

❖ آب های زیرزمینی غیر ماندگار

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_t = \alpha f_{xx}$$

$$f_t = \alpha \nabla^2 f$$

❖ معادله موج

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{tt} = c^2 f_{xx}$$

$$f_{tt} = c^2 \nabla^2 f$$

$$\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

طبقه‌بندی معادلات

□ مختصات یکطرفه و دوطرفه

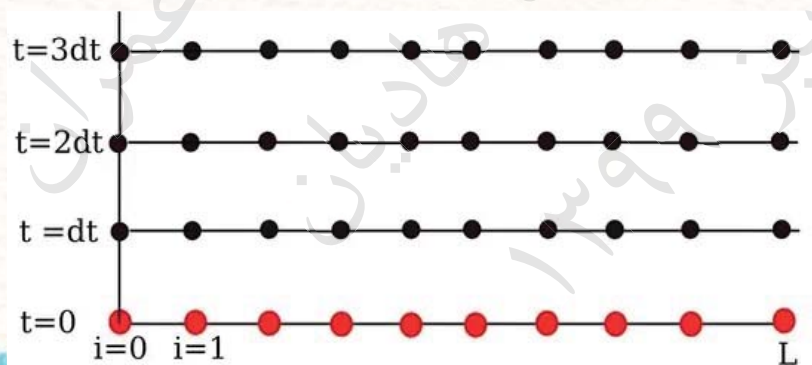
❖ معمولاً مکان مختصات دوطرفه است و باید شرط مرزی در هر دو طرف داده شوند.

$$x_2 \geq x \geq x_1, y_2 \geq y \geq y_1, z_2 \geq z \geq z_1$$

❖ زمان مختصات یکطرفه است و فقط در یکطرف آن لازم است شرایط داده شود.

$$t_2 \geq t \geq t_1$$

✓ نوعی رژه رفتن (marching) برای روش حل انتخاب می‌کنیم.



طبقه‌بندی معادلات

□ مرتبه (Order): بالاترین مرتبه مشتق در یک معادله PDE

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3x \frac{\partial f}{\partial x} = e^x \quad \text{❖ مرتبه ۳}$$

$$\frac{df}{dx} + (x^2 + 5) f = \frac{x}{5} \quad \text{❖ مرتبه ۱}$$

$$-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^4 + \frac{\partial f}{\partial x} = 3 \quad \text{❖ مرتبه ۲}$$

طبقه‌بندی معادلات

□ درجه (Degree): توان بالاترین مرتبه مشتق در یک معادله PDE

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 - 3x \frac{\partial f}{\partial x} + f = 9$$

❖ درجه ۱ (مرتبه ۴)

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right)^4 = k^2 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)^2$$

❖ درجه ۲ (مرتبه ۳)

طبقه‌بندی معادلات

□ خطی و غیر خطی

❖ خطی (Linear): متغیرهای وابسته و مشتق‌های آن بصورت خطی هستند. یعنی ضرب متغیر وابسته و مشتق آن در معادلات نیست.

$$f_t = -a f_x$$

❖ غیر خطی (Non linear): حاصل ضرب متغیرهای وابسته یا مشتق‌های آن در معادله وجود دارد.

$$f_t = -f f_x$$

❖ شبه خطی (Quasilinear): معادله نسبت به بالاترین مرتبه مشتق وابسته خود خطی باشد.

$$f_t = -f f_x + f_{xx} + x f$$

طبقه‌بندی معادلات

□ تک معادله دیفرانسیلی پاره‌ای خطی مرتبه ۲

$$Af_{xx} + Bf_{xy} + Cf_{yy} + D = 0$$

$$D = Ef_x + Ff_y + Gf + H$$

$$f(x, y)$$

❖ معادله بیضوی (Elliptic): $B^2 - 4AC < 0$

❖ معادله سهموی (Parabolic): $B^2 - 4AC = 0$

❖ معادله هذلولوی (Hyperbolic): $B^2 - 4AC > 0$

✓ معادلات بیضوی از نوع مسائل مقدار مرزی و معادلات سهموی و هذلولوی از نوع مسائل شرط اولیه هستند.

طبقه‌بندی معادلات

□ دستگاه معادلات خطی مرتبه اول

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

$$\begin{cases} A_{11}u_x + B_{11}u_y + A_{12}v_x + B_{12}v_y = E_1 \\ A_{21}u_x + B_{21}u_y + A_{22}v_x + B_{22}v_y = E_2 \end{cases}$$

❖ معادله بیضوی (Elliptic): $\Delta < 0$

❖ معادله سهموی (Parabolic): $\Delta = 0$

❖ معادله هذلولوی (Hyperbolic): $\Delta > 0$

$$\Delta = (A_{11}B_{22} - A_{21}B_{12} + A_{22}B_{11} - A_{12}B_{21})^2 - 4(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})(B_{11}B_{22} - B_{21}B_{12})$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} A_{11} & B_{12} \\ A_{21} & B_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_{11} & A_{12} \\ B_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = B^2 - 4|A||C|$$

طبقه‌بندی معادلات

□ معادلات کلی حاکم بر حرکت سیال (Navier-Stokes):

❖ غیردائمی و تراکم‌پذیر ← سهموی-هذلولوی

❖ دائمی و تراکم‌پذیر ← سهموی-بیضوی

❖ غیردائمی و تراکم‌ناپذیر ← سهموی-بیضوی

❖ دائمی و تراکم‌ناپذیر ← بیضوی

حوزه وابستگی و دامنه تأثیر

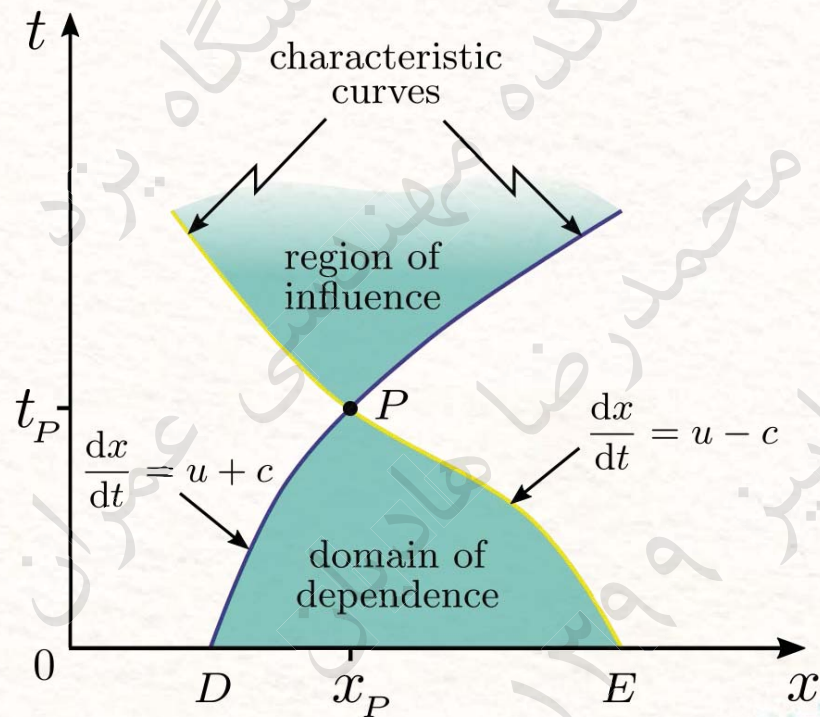
□ حوزه وابستگی (Domain of Dependency):

برای هر نقطه، محدوده‌ای که وضعیت نقطه به وضعیت آن محدوده بستگی دارد.

□ دامنه تأثیر (Range of Influence):

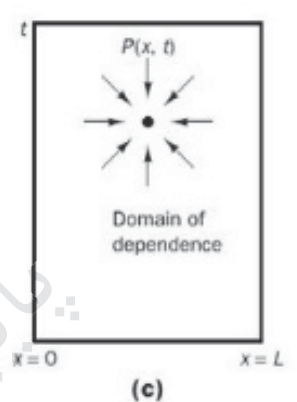
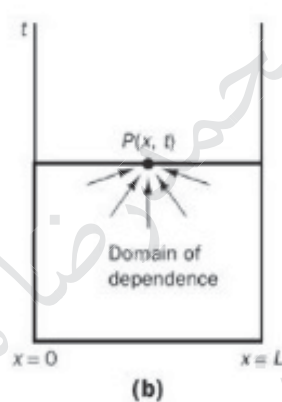
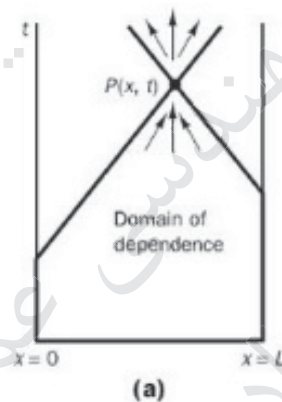
برای هر نقطه، محدوده‌ای وجود دارد که وضعیت نقطه بر آن محدوده اثر دارد.

حوزه وابستگی و دامنه تاثیر



حوزه وابستگی و دامنه تاثیر

Domains of dependence for the (a) hyperbolic, (b) parabolic and (c) elliptic problem



حل مثال دستگاه n معادله و n مجهولی خطی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

حل مثال دستگاه n معادله و n مجهولی خطی

طرح مسئله (ایجاد ماتریس
ضرائب و مقدار ثابت)

حل دستگاه
معادلات

بررسی درستی
جوابها

حل مثال دستگاه n معادله و n مجهولی خطی

□ طرح مسئله

- ❖ دریافت n از کاربر
- ❖ تولید ماتریس ضرائب (A) با استفاده از تابع عدد تصادفی
- ❖ اصلاح ماتریس ضرائب (کنترل عناصر روی قطر) $a_{ii} \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$
- ❖ تولید ماتریس مجهولات (x)
- ❖ محاسبات ماتریس مقادیر ثابت (b) از معادله $Ax=b$
- ❖ ذخیره تعداد معادلات، ماتریس ضرائب و مقادیر ثابت در یک فایل و مقادیر جواب در فایل دیگر

حل مثال دستگاه n معادله و n مجهولی خطی

□ حل مسئله

- ❖ دریافت اطلاعات تعداد معادلات و ماتریس ضرائب و مقدار ثابت از فایل
- ❖ حل دستگاه معادلات
- ❖ ذخیره جوابها در یک فایل

حل مثال دستگاه n معادله و n مجهولی خطی

□ کنترل جواب‌ها

❖ دریافت جواب‌های قسمت طرح مسئله و جواب‌های بدست آمده از حل مسئله

❖ مقایسه جواب‌های بدست آمده از حل مسئله با جواب‌های تولید شده در قسمت طرح مسئله

$$\frac{\text{Max}(|x_i - x'_i|)_{i=1,n}}{\bar{x}} < \varepsilon$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i - x'_i|}{\bar{x}} < \varepsilon$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i - x'_i|}{n \bar{x}} < \varepsilon$$

Any
Question?